12 DYNAMIKA SOUSTAVY HMOTNÝCH BODŮ

Těžiště
I. impulsová věta - věta o pohybu těžiště
II. impulsová věta
Zákony zachování v izolované soustavě hmotných bodů

Náhrada pohybu skutečných objektů pohybem jediného hmotného bodu nemusí být vždy postačující. Složitější systémy mohou vykonávat kromě translačního (posuvného) pohybu i rotační pohyb. V takovémto případě si musíme vytvořit model reálného objektu pomocí soustavy hmotných bodů. Tato představa bude pak dobře použitelná i pro tuhá tělesa, protože je můžeme považovat za soubor pevně vázaných malých částic (atomů a molekul), které velmi dobře splňují požadavky kladené na hmotné body. Z uvedených příčin potřebujeme rozšířit Newtonovy dynamické zákony na pohyb systémů hmotných bodů.

12.1 Těžiště

Velmi užitečným pojmem je pojem těžiště. Definuje se rozličným způsobem. Podle obecně vžité představy je těžiště jakýsi hmotný střed tělesa. Požadavku kvantitativních výpočtů nejlépe odpovídá definice 12.1.

12.1
Těžiště dvou hmotných bodů m_1 a m_2 je takový bod na jejich spojnici, který ji dělí v obráceném poměru k jejich hmotnostem (obr. 12.1)

$$\frac{x}{y} = \frac{m_2}{m_1}. \qquad (12.1)$$

12.2
Polohový vektor těžiště dvou hmotných bodů je

$$\boldsymbol{r}^* = \frac{m_1\boldsymbol{r}_1 + m_2\boldsymbol{r}_2}{m_1 + m_2}. \qquad (12.2)$$

12.3
Polohový vektor těžiště soustavy hmotných bodů je

Platnost vztahu (12.2) vyplývá z definice 12.1 a z obr. 12.1. Podle definice součtu vektorů můžeme psát

$$\boldsymbol{r}^* = \boldsymbol{r}_1 + \boldsymbol{x}, \qquad \boldsymbol{r}^* = \boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{y}.$$

Pro vektory $\boldsymbol{x}$ a $\boldsymbol{y}$ platí podle definice (12.1)

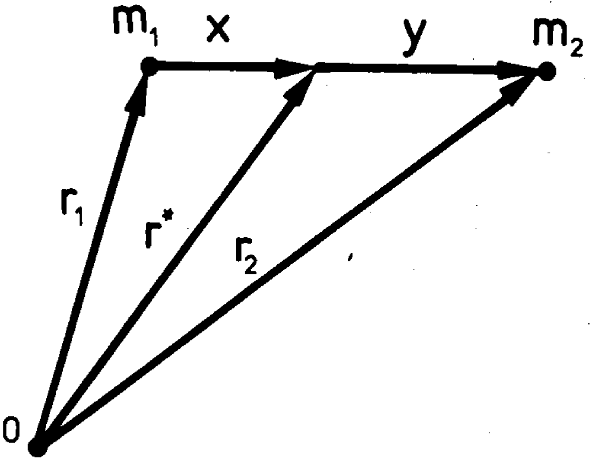
$$\boldsymbol{x} = \frac{m_2}{m_1}\boldsymbol{y},$$

takže po dosazení do předcházejících rovnic dostaneme rovnici
jejímž řešením je vztah (12.2).

$$\boldsymbol{r}^* = \boldsymbol{r}_1 + \frac{m_2}{m_1}\boldsymbol{y} = \boldsymbol{r}_1 + \frac{m_2}{m_1}(\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}^*),$$

Polohový vektor těžiště tří hmotných bodů můžeme nalézt tak, že dva z nich nahradíme novým

$$r^* = \frac{\Sigma m_i r_i}{\Sigma m_i} = \frac{1}{M} \Sigma m_i \vec{r}_i \qquad (12.3)$$



Obr. 12.1 K definici těžiště

hmotným bodem s hmotností $m_1 + m_2$ umístěným v těžišti s polohovým vektorem $\boldsymbol{r}^*$ (12.2), takže se problém redukuje opět na nalezení těžiště dvou hmotných bodů. Pro *n* hmotných bodů se postup (*n*-1) kráte opakuje. Lehce můžeme dokázat, že hledaný vztah má tvar (12.3).

Rozložením vektorů $\boldsymbol{r}^*$ a $\boldsymbol{r}_i$ na složky a postupným vynásobením rovnice (12.3) jednotkovými vektory ***i***, ***j***, **k** dostaneme vztahy pro souřadnice těžiště

$$x^* = \frac{1}{M} \Sigma = m_i x_i, \quad y^* = \frac{1}{M} \Sigma$$
$$z^* = \frac{1}{M} \Sigma m_i z_i \qquad (12.4)$$

Z těchto vztahů vyplývá, že je-li soustava homogenní a vzhledem k některé ose symetrická, je potom příslušná souřadnice těžiště rovna nule. Např. jestliže každému hmotnému bodu soustavy s hmotností m_i a souřadnicí x_i odpovídá hmotný bod stejné hmotnosti se souřadnicí $-x_i$, je $x^* = 0$.

12.2 I. impulsová věta - věta o pohybu těžiště

Při zkoumání pohybu soustavy hmotných bodů nás často zajímá jen její pohyb jako celku, tj. nevšímáme si vzájemného pohybu jeho jednotlivých částí. V takovém případě můžeme pohybovou rovnici soustavy hmotných bodů značně zjednodušit a formulovat ji buď jako tzv. I. impulsovou větu (věta 12.4) nebo jako větu o pohybu těžiště (věta 12.5). Z nich vyplývá, že hybnost izolované soustavy se zachovává.

12.4
I. impulsová věta: součet všech vnějších sil působících na soustavu hmotných bodů ($F = \Sigma_i F_i$) je roven časové derivaci celkové hybnosti soustavy ($p = \Sigma_i p_i$)

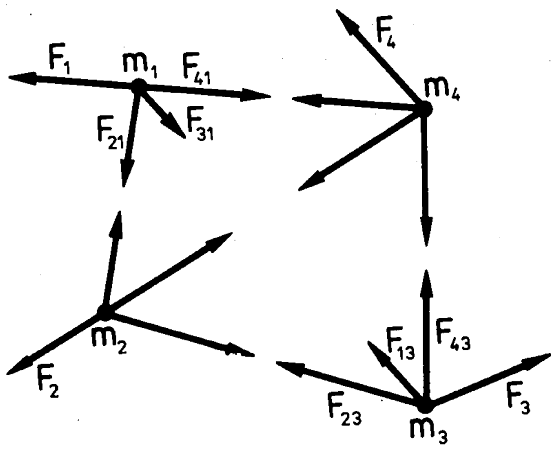
$$\boldsymbol{F} = \frac{d\boldsymbol{p}}{dt}. \qquad (12.5)$$

Při aplikaci Newtonových dynamických zákonů na systém hmotných bodů musíme uvážit, že kromě vnějších sil působí mezi hmotnými body systému i vnitřní (vazební) síly (obr. 12.2). Označme vnější síly působící na jednotlivé body $\boldsymbol{F}_1$, $\boldsymbol{F}_2 ... \boldsymbol{F}_i ... \boldsymbol{F}_n$, vnitřní síly, působící na i-tý hmotný bod od ostatních hmotných bodů $\boldsymbol{F}_{1i}$, $\boldsymbol{F}_{2i} ... \boldsymbol{F}_{ji} ... \boldsymbol{F}_{ni}$, přičemž podle principu akce a reakce (věta 11.4) platí $\boldsymbol{F}_{ij} = -\boldsymbol{F}_{ji}$. Obecně tedy působí na i-

12.5
Těžiště soustavy hmotných bodů se pohybuje tak, jako kdyby celá hmotnost soustavy byla soustředěna v těžišti a všechny vnější síly působily v těžišti

$$\boldsymbol{F} = M\boldsymbol{a}^*, \qquad (12.6)$$

kde $\boldsymbol{a}^*$ je zrychlení těžiště soustavy.



Obr. 12.2 Vnitřní a vnější síly soustavy hmotných bodů

tý hmotný bod síla $\boldsymbol{F}_i + \Sigma_j \boldsymbol{F}_{ji}$ a uděluje mu zrychlení a_i podle zákonu síly

$$\boldsymbol{F_i} = \Sigma_i \boldsymbol{F_{ii}} = m_i \boldsymbol{a_i} (\boldsymbol{F_{ii}} = 0).$$

(12.7)

Vnitřní síly však neznáme, proto se budeme snažit je z pohybových rovnic vyloučit. Využijeme přitom poznatek, že $\Sigma_{ij} \boldsymbol{F}_{ji} = 0$, tj. součet všech vnitřních sil se rovná nule, protože každé síle $\boldsymbol{F}_{ij}$ odpovídá síla $\boldsymbol{F}_{ji} = -\boldsymbol{F}_{ij}$. Abychom mohli tento poznatek využít, sečteme všechny rovnice (12.7), pro všechny hmotné body systému 1...*n*. Dostaneme rovnici

$$\Sigma_i \boldsymbol{F_i} + \Sigma_i \Sigma_j \boldsymbol{F_{ji}} = \Sigma_i m_i a_i.$$

(12.8)

Dále postupujeme dvojí cestou: zrychlení a_i vyjádříme podle jeho definice buď ve tvaru $d\boldsymbol{v}_i/dt$ nebo ve tvaru $d^2\boldsymbol{r}_i/dt^2$. V prvém případě dostaneme

$$\Sigma_i \vec{F}_i = \Sigma_i m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} = \Sigma_i \frac{d(m_i \boldsymbol{v_i})}{dt} = \frac{d}{dt} \Sigma_i m_i \boldsymbol{v_i} = \frac{d}{dt} \Sigma_i \boldsymbol{p_i}.$$

tj. rovnici (12.5), v druhém případě vychází

$$\Sigma_i F_i = \Sigma_i m_i \frac{d^2 \boldsymbol{r_i}}{dt^2} = \frac{d^2}{dt^2} \Sigma_i m_i = \frac{d^2}{dt^2} (M\boldsymbol{r}^*) = M\boldsymbol{a}^*,$$

přičemž jsme použili vztah (12.3).

12.3 II. impulsová věta

K úplnému popisu soustavy hmotných bodů nestačí I. impulsová věta, proto si obecné pohybové rovnice platné pro každý hmotný bod soustavy zvlášť upravujeme do tzv. II. impulsové věty (věta 12.6). Je vhodná zejména při zkoumání rotačních pohybů. Z ní vyplývá, že v izolované soustavě hmotných bodů se výsledný moment hybnosti zachovává.

12.6

II. impulsová věta: součet momentů vnějších sil působících na soustavu hmotných bodů ($\boldsymbol{M} = \Sigma_i \boldsymbol{M}_i$) je roven časové derivaci celkového momentu hybnosti soustavy ($\boldsymbol{b} = \Sigma_i \boldsymbol{b}_i$)

$$\boldsymbol{M} = \frac{d\boldsymbol{b}}{dt}. \tag{12.9}$$

Momenty $\boldsymbol{M}$ a $\boldsymbol{b}$ jsou vztaženy ke stejnému referenčnímu bodu.

Důkaz platnosti věty 12.6 provedeme tak, že vynásobíme rovnici (12.7) vektorově polohovým vektorem $\boldsymbol{r}_i$, čímž se podle definice (11.10) změní levá strana rovnice na moment síly $\boldsymbol{M}_i$ a pravá strana na moment hybnosti $\boldsymbol{b}_i$. Dostaneme tak rovnici

$$\boldsymbol{r_i}\, x(\boldsymbol{F_i} + \Sigma_j \boldsymbol{F_{ji}}) = \boldsymbol{r_i} x m_i \boldsymbol{a_i} = \\ = \frac{d}{dt}(\boldsymbol{r_i} x m_i \boldsymbol{v_i}) = \frac{db_i}{dt}. \tag{12.10}$$

Proveďme součet všech těchto rovnic pro všech n bodů

$$\Sigma_i \boldsymbol{r_i} x(\boldsymbol{F_i} + \Sigma_j \boldsymbol{F_{ji}}) = \frac{d}{dt}\Sigma_i \boldsymbol{b_i}. \tag{12.11}$$

Podle (11.4) je součet momentů sil akce a reakce mezi dvěma hmotnými body působící na sebe silami $\boldsymbol{F}_{12} = -\boldsymbol{F}_{21}$ roven nule, proto druhý člen na levé straně rovnice (12.11) je roven nule a zůstane rovnice

$$\Sigma_i(\boldsymbol{r_i} x \boldsymbol{F_i}) = \frac{d}{dt}\Sigma_i \boldsymbol{b_i}, \tag{12.12}$$

kterou můžeme napsat ve tvaru (12.9).

12.4 Zákony zachování v izolované soustavě hmotných bodů

Pro soustavu hmotných bodů můžeme za určitých předpokladů nalézt některé "invarianty" - veličiny, které se časem nemění. Ukážeme, že se jedná o celkovou hybnost, celkový moment hybnosti a celkovou mechanickou energii izolované soustavy hmotných bodů. Odpovídající zákony jsou formulovány ve větách 12.8, 12.9 a 12.10.

12.7
Izolovaná soustava hmotných bodů je taková soustava, pro kterou platí, že výslednice vnějších sil $\boldsymbol{F} = \Sigma_i \boldsymbol{F}_i = 0$ a výsledný moment vnějších sil $\boldsymbol{M} = \Sigma_i \boldsymbol{M}_i = 0$.

12.8
<u>Zákon zachování hybnosti</u>: v izolované soustavě hmotných bodů se celková hybnost ($\boldsymbol{p} = \Sigma_i \boldsymbol{p}_i$) zachovává

$$\boldsymbol{p} = konstantní\ \ vektor. \qquad (12.13)$$

12.9
<u>Zákon zachování momentu hybnosti</u>: v izolované soustavě hmotných bodů se celkový moment hybnosti ($\boldsymbol{b} = \Sigma_i \boldsymbol{b}_i$) zachovává

$$\boldsymbol{b} = konstantní\ \ vektor. \qquad (12.14)$$

12.10
<u>Zákon zachování mechanické energie</u>: v izolované soustavě hmotných bodů, ve které působí pouze konzervativní síly se mechanická energie soustavy zachovává

$$W_m = W_k + W_p = konstantní. \qquad (12.15)$$

K odvození vztahů (12.13) a (12.14) ve větách 12.8 a 12.9 vynásobíme rovnice (12.5) a (12.9) diferenciálem času dt a zintegrujeme takto získané rovnice. Zjistíme, že obě impulsové věty můžeme vyjádřit i ve tvaru

$$\int_{t_1}^{t_2} \boldsymbol{F}\,dt = \boldsymbol{I} = \boldsymbol{p}_2 - \boldsymbol{p}_1 \qquad (12.16)$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \boldsymbol{M}\,dt = \boldsymbol{L} = \boldsymbol{b}_2 - \boldsymbol{b}_1. \qquad (12.17)$$

Tento zápis je analogický zápisu věty o impulsu a hybnosti (11.9) a věty o impulsu momentu síly a momentu hybnosti (11.13), jen s tím rozdílem, že v odstavci 11 jsme hovořili o hmotném bodu, zatímco v tomto odstavci hovoříme o soustavě hmotných bodů, a proto veličiny $\boldsymbol{p}$ a $\boldsymbol{b}$ popisují hybnost a moment hybnosti celé soustavy hmotných bodů. Vztah (12.16) pro izolovanou soustavu (za podmínky $\boldsymbol{F} = 0$) vyjadřuje zákon zachování hybnosti a vztah (12.17) (za podmínky $\boldsymbol{M} = 0$) zákon zachování momentu hybnosti, což je obsahem vět 12.8 a 12.9.

K odvození vztahu (12.15) ve větě 12.10 předpokládejme soustavu hmotných bodů, které na sebe vzájemně působí konzervativními silami, tj. vnitřními silami, takže je možno zavést potenciální energii soustavy $\boldsymbol{W}_p$, která je funkcí polohy všech hmotných bodů

$$W_p = \Sigma\, W_{pij} = W_{p12} + W_{p13} + \ldots + W_{p23} \ldots$$

(12.18)

Ve shodě s větou o přírůstku potenciální energie 11.20 můžeme psát pro přírůstek potenciální energie soustavy (při přechodu ze stavu 1 do stavu 2)

$$W_{p2} - W_{p1} = -A_{12\ int}, \tag{12.19}$$

kde $A_{12\ \mathrm{int}}$ je práce všech vnitřních sil soustavy při přenesení soustavy ze stavu 1 do stavu 2.

Kinetická energie soustavy je definována jako součet kinetických energií všech hmotných bodů soustavy

$$W_k = \Sigma_i W_{ki} = W_{k1} + W_{k2} + W_{k3} + \ldots\ . \tag{12.20}$$

Ve shodě s větou o přírůstku kinetické energie 11.18 můžeme psát pro přírůstek kinetické energie soustavy (mezi stavem soustavy 1 a 2)

$$W_{k2} - W_{k1} = A, \tag{12.21}$$

kde A je součet práce vnitřních sil $A_{12\ int}$ a vnějších sil A_{ext}

$$A = A_{12\ int} + A_{ext}. \tag{12.22}$$

Spojením výrazů (12.19), (12.21) a (12.22) získáme

$$W_{k2} - W_{k1} = -\,(W_{p2} - W_{p1}) + A_{ext}$$

a označíme-li mechanickou energii $W_\mathrm{m} = W_k + W_\mathrm{p}$ bude

$$W_{m2} - W_{m1} = A_{ext}. \tag{12.23}$$

Předchozí vztah je matematický zápis zákona o přírůstku mechanické energie soustavy. Jedná-li se o izolovanou soustavu je $A_{ext} = 0$ a platí věta 12.10.

Při odvozování zákona zachování energie ve tvaru (12.15) jsme se omezili na idealizované soustavy s hmotnými body a na existenci konzervativních sil mezi jednotlivými hmotnými body soustavy. Opustíme-li tato zjednodušení a budeme předpokládat, že soustava je složena z těles, která mají vnitřní mikroskopickou strukturu (atomy a molekuly) a dále připustíme existenci disipativních sil při vzájemném působení mezi nimi zjistíme, že při makroskopickém pohledu na izolovanou soustavu se součet kinetické a potenciální energie zmenšuje s časem. Energie se však neztrácí, nýbrž se projevuje zvýšením vnitřní energie těles soustavy. Platnost zákona 12.15 rozšíříme i pro tento případ jednoduše tak, že přidáme ke členům W_k a W_p ještě tak zvanou vnitřní energii U, která zahrnuje kinetickou a potenciální energii molekul nebo atomů všech těles, z nichž se systém skládá

$$W_k + W_p + U = konstantní\,.$$

Budeme-li se ale dívat na náš systém z hlediska mikrofyzikálního (atomárního), platí zákon zachování energie 12.15 v původním tvaru. Pak ovšem člen W_k obsahuje nejen kinetické energie jednotlivých těles jako celků, ale i kinetickou energii molekul nebo atomů uvnitř jednotlivých těles jako celků, ale i kinetickou energii molekul nebo atomů uvnitř jednotlivých těles a člen W_p pak zahrnuje nejen potenciální energii způsobenou vzájemnou interakcí těles mezi sebou, ale i potenciální energii způsobenou interakcí mezi molekulami uvnitř každého tělesa.