22 ELEKTROMAGNETICKÉ POLE

Elektromagnetická indukce
Vlastní a vzájemná indukce, energie magnetického pole
Střídavý elektrický proud
Oscilační obvod a vyzařování elektromagnetické energie
Maxwellovy rovnice

Podle Biotova-Savartova-Laplaceova zákona je v okolí pohybujících se elektrických nábojů kromě elektrického pole i pole magnetické. Z předcházejícího by se mohlo zdát, že elektrické pole je primární a magnetické pole sekundární v tom smyslu, že elektrické pole může vytvořit magnetické pole, ale ne naopak. Seznámíme se však i s jevy, při kterých bude sled obrácený - primární bude magnetické pole a sekundární elektrické pole. Zobecněním získaných experimentálních poznatků dospějme k rovnicím vyjadřujícím vzájemnou podmíněnost elektrických a magnetických polí. Tuto reálně existující vzájemně podmíněnou soustavu elektrického a magnetického pole nazýváme elektromagnetickým polem.

"Čisté" elektrostatické a magnetostatické pole je jen určitým speciálním případem fyzikální skutečnosti. Podle rovnic popisujících elektromagnetické pole může toto pole existovat i v prostoru, v kterém nejsou zjevné zdroje elektrického a magnetického pole, tj. elektrické náboje a magnetické dipóly, takže elektromagnetické pole je třeba považovat za stejný samostatný projev objektivně existující hmoty, jako je látka.

Spojením vztahů (19.91) který vyjadřuje hustotu energie elektrického pole a obdobného vztahu pro magnetické pole $w_m=1/2\ \boldsymbol{H}.\boldsymbol{B}$ (který odvodíme v článku 22.2) dostaneme vztah udávající hustotu energie v elektromagnetickém poli. Má tvar

$$w = \frac{1}{2}\ (E.D + B.H). \tag{22.1}$$

22.1 Elektromagnetická indukce

Na elektrický náboj pohybující se rychlostí $\boldsymbol{v}$ působí v magnetickém poli síla určená vztahem (21.18) $\boldsymbol{F}$=q ($\boldsymbol{v}$ x $\boldsymbol{B}$). Tento pohyb můžeme realizovat i tak, že začneme pohybovat v magnetickém poli polovodičem, v kterém jsou vždy přítomné volné nosiče náboje (obr. 22.1). I když se tyto náboje vzhledem k samotnému vodiči nepohybují, vykonávají spolu s ním relativní pohyb v magnetickém poli, proto začne na tyto náboje působit síla. Účinek této síly, která má povahu "cizí" síly, definované ve článku 20.3, se nedá odlišit od účinku síly vyvolané ve vodiči elektrickým polem, proto můžeme konstatovat, že pohybem vodiče v magnetickém poli se v něm indukuje elektrické pole. Jestliže je vodič uzavřený, začne jím protékat tzv. indukovaný elektrický proud. Tento jev se nazývá elektromagnetická indukce.

22.1
Indukovaná intenzita elektrického pole $\boldsymbol{E}_i$ je určena

Jestliže ze vztahu (21.18) $\boldsymbol{F}=q$ ($\boldsymbol{v}$ x $\boldsymbol{B}$) stanovíme sílu, která ve vnějším magnetickém poli vztahem

$$\boldsymbol{E}_i = \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}, \qquad (22.2)$$

kde $\boldsymbol{v}$ je rychlost pohybu vodiče a $\boldsymbol{B}$ je magnetická indukce vnějšího magnetického pole.

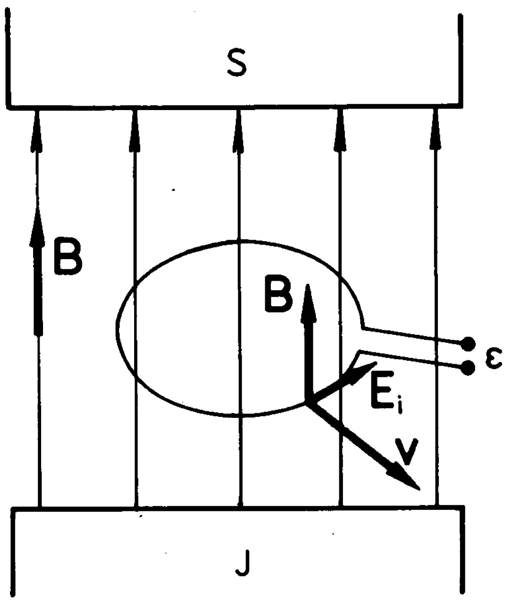
22.2

<u>Faradayův zákon elektromagnetické indukce</u>: (integrální tvar) Elektromotorické napětí ϵ_i indukované v uzavřené křivce se rovná záporně vzaté časové derivaci indukčního toku plochou ohraničenou danou uzavřenou křivkou ℓ

$$\epsilon_i = \oint_\ell \boldsymbol{E}_i . d\boldsymbol{s} = -\frac{d\Phi}{dt}. \qquad (22.3)$$

Diferenciální tvar Faradayova zákona elektromagnetické indukce:

$$rot\ \boldsymbol{E}_i = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}. \qquad (22.4)$$



Obr. 22.1 Vznik elektromotorického napětí ve vodiči pohybujícím se v magnetickém poli

působí na jednotkový elektrický náboj v pohybujícím se vodiči, dostaneme vztah pro intenzitu indukovaného elektrického pole

$$\boldsymbol{E}_i = \frac{\boldsymbol{F}}{q} = \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}.$$

Jelikož síla $\boldsymbol{F}$ má charakter cizí síly (srovnej s článkem 20.3), proto i příslušné elektrostatické napětí najdeme na základě definice (20.14) pomocí vztahu

$$\epsilon_i = \oint_\ell \boldsymbol{E}_i . d\boldsymbol{r} = \oint_\ell (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}) . d\boldsymbol{r}.$$

(22.5)

Tento vztah můžeme upravit na jednodušší, avšak přitom na obecnější tvar. Upravme proto předcházející vztah tak, že ho vynásobíme faktorem dt/dt. Dostaneme

$$\epsilon_i = -\frac{1}{dt}\int (\boldsymbol{v}dt \times d\boldsymbol{r}) . B.$$

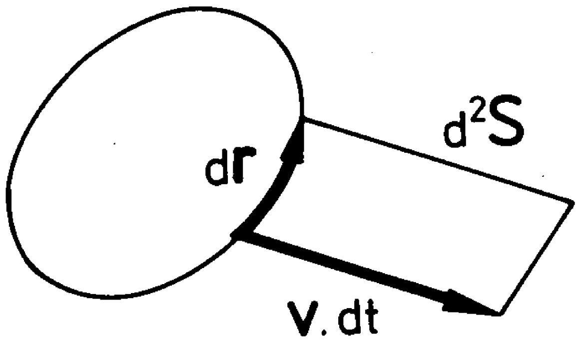
Funkce ($d\boldsymbol{r}$ x $\boldsymbol{v}dt$) má podle obr. 22.2 význam diferenciálu plošného vektoru druhého řádu $d^2\boldsymbol{S}$, která vzniká posunutím elementu $d\boldsymbol{r}$ po dráze $\boldsymbol{v}dt$, takže platí

$$\epsilon_i = -\frac{1}{dt}\int_S d^2\boldsymbol{S} . \boldsymbol{B} = -\frac{d}{dt}\int_S \boldsymbol{B} . d\boldsymbol{S} = d\frac{\Phi}{dt}$$

což je vztah (22.3). Podle této formulace se indukuje elektromotorické napětí vždy, jestliže se s časem mění indukční tok. Ze způsobu odvození tohoto vztahu vyplývá, že tato změna je podmíněna změnou polohy vodiče v magnetickém poli. Z formulace (22.3) však vyplývá, že stejný efekt by měl vzniknout i tehdy, jestliže by se vodič v magnetickém poli nepohyboval, avšak se s časem měnilo magnetické pole. I v tomto případě by totiž bylo $d\Phi/dt \neq 0$. Pokusy, které vykonal Faraday, potvrdily správnost těchto úvah. Oba způsoby generace elektrického pole, tj. pohybem vodiče v magnetickém poli i změnou indukce magnetického pole se široce využívají v elektrotrchnice.

Ještě více vynikne skutečnost, že i časová změna magnetické indukce může zapříčinit vznik elektrického pole, jestliže integrální rovnici (22.3) upravíme tak, abychom ji mohli vyjádřit v diferenciálním tvaru. Rovnici

$$\oint_{\ell} \boldsymbol{E}_i . d\boldsymbol{r} = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt}\int_S \boldsymbol{B}.d\boldsymbol{S} = $$
$$= -\int_S \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}.d\boldsymbol{S}$$



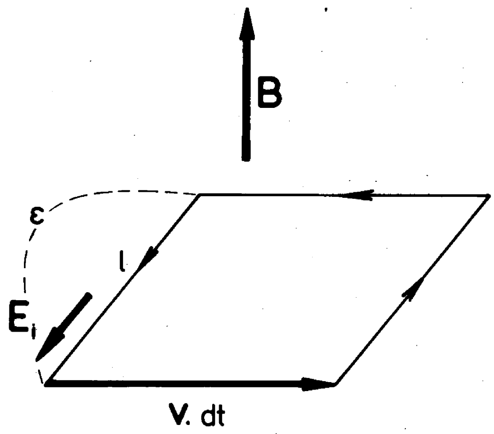
Obr. 22.2 K odvození zákona elektromagnetické indukce

můžeme pomocí Stokesovy věty přepsat na tvar

$$\int_S rot\ \boldsymbol{E}_i . d\boldsymbol{S} = -\int_S \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}.d\boldsymbol{S},$$

z které vyplývá rovnice

$$rot\ \boldsymbol{E}_i = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}. \qquad (22.6)$$



Obr. 22.3 Elektromagnetické napětí při pohybu přímého vodiče v magnetickém poli

V obecném případě máme v prostoru elektrické pole buzené elektrickými náboji a pole buzená elektromagnetickou indukcí. Celková intenzita elekrického pole je proto určená vztahem $\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}_V+\boldsymbol{E}_i$, takže platí rovnice

$$rot\ \boldsymbol{E} = rot\ \boldsymbol{E}_v + rot\ \boldsymbol{E}_i =$$
$$= -rot\ grad\ V + rot\ \boldsymbol{E}_i = rc$$

protože rot grad $V=\nabla \times (\nabla V)=(\nabla \times \nabla) V=0$. S ohledem na tento výsledek splňuje intenzita každého elektrického pole rovnici rot $\boldsymbol{E}=-\partial \boldsymbol{B}/\partial t$, tj. rovnici (22.4) což bylo potřeba dokázat.

Poznámka:

Někdy se kromě formulace (22.3) uvádí

FARADAY Michel (feredy), 1791-1867, anglický fyzik, pro množství základních objevů zařazovaný mezi nejvýznamnější fyziky všech dob přesto, že fyziku (ani matematiku) ve škole nestudoval. Faraday byl zejména velmi zručným experimentátorem. Z jeho objevů vzpomeňme alespoň jev elektromagnetické indukce velmi významný pro elektrotechnickou praxi, zákony elektrolýzy, diamagnetismu, vysvětlení vzniku elektromotorického napětí v galvanickém článku, stáčení polarizační roviny světla, uskutečnění důkazu o zachování elektrického náboje, zavedení pojmu pole aj. Na jeho počest je pojmenována jeho jménem jednotka kapacity.

WEBER Wilhelm Eduard, 1804-1891, německý fyzik. Zabýval se elektrickými a magnetickými jevy. Objevil zákon vzájemného působení pohybujících se elektrických nábojů. Na jeho počest je jednotka magnetického toku pojmenována jeho jménem.

jako nevyhnutelné formulovat zákon elektromagnetické indukce ještě i v jiném tvaru. Přímo ze vztahu (22.5) vyplývá, že elektromotorické napětí indukované v přímém úseku vodiče délky ℓ pohybujícího se rychlostí $v \perp B$ (obr. 22.3) platí vztah

$$|\epsilon_i| = B\ell v. \tag{22.7}$$

Argumentuje se tím, že tento výsledek není obsažen ve formulaci (22.3). Ve skutečnosti tomu tak není, protože ze způsobu odvození zákona $\epsilon_i = -d\Phi/dt$ je zřejmé, že veličina $d\Phi$ souvisí s plochou, kterou vodič délky vytvoří za čas dt. V našem případě je tedy (obr. 22.3)

$$d\Phi = B\ell v dt$$

takže

$$\epsilon_i = -\frac{d\Phi}{dt} = B\ell v,$$

což je vztah (22.7).

22.2 Vlastní a vzájemná indukce, energie magnetického pole

Podle Faradayova zákona (22.3) má každá časová změna magnetické indukce za následek vznik elektromotorického napětí. Protože magnetická indukce je přímo úměrná elektrickému proudu, můžeme vyvolat indukované elektromotorické napětí nejjednodušeji změnou elektrického proudu, který protéká daným obvodem. Přitom existují dvě možnosti:

1. Indukované elektromotorické napětí vzniká ve stejném vodiči, který tvoří uzavřený elektrický obvod, kterým protéká měnící se elektrický proud (obr. 22.4). Tento jev se nazývá vlastní indukce (věta 22.4).

2. Indukované elektromotorické napětí vzniká v jiném uzavřeném obvodu, který alespoň svou částí zasahuje do magnetického pole vytvořeného primárním zdrojem (obr. 22.5). V tomto případě hovoříme o jevu vzájemné indukce (věta 22.4).

22.3
Magnetický indukční tok Φ je - až na výjimky - přímo úměrný proudu, který tento tok vytváří

$$\Phi = L\ I. \tag{22.8}$$

Konstanta úměrnosti L se nazývá (vlastní) indukčnost.

Spřažený magnetický indukční tok dvou obvodů Φ_{21} (Φ_{12}) je přímo úměrný proudu I_1 (I_2),

Vztahy (22.8-22.12) jsou jednoduchým důsledkem Faradayova a Biotova-Savartova-Laplaceova zákona. Přímá úměrnost mezi indukčním tokem proudu se, jak uvidíme později, narušuje v případě feromagnetických látek. Dosazením vztahu $\Phi=LI$ zákona $\epsilon_i=-d\Phi/dt$ dostaneme ihned vztahy (22.11) a (22.12). Pomocí těchto vztahů můžeme podat názornější definici jednotky indukčnosti. Je totiž $L=|\epsilon_i|.dt/dI$, takže indukčnost 1H má takový uzavřený proudovodič, v kterém se při změně proudu o 1A za čas 1s indukuje který tento tok vytváří

$$\Phi_{21} = M_{21}\ I_1 \quad resp. \quad \Phi_{12} = M_{12}\ I_2, \qquad (22.9)$$

přičemž platí

$$M_{12} = M_{21} = M. \qquad (22.10)$$

Konstanta úměrnosti M se nazývá vzájemná indukčnost.
Jednotka indukčnosti a vzájemné indukčnosti je $[L]=[M]=H$ (henry).

22.4
Elektromotorické napětí vznikající při vlastní indukci je dáno vztahem

$$\epsilon_i = -L\frac{dI}{dt}, \qquad (22.11)$$

při vzájemné indukci

$$\epsilon_{i1} = -M\frac{dI_2}{dt} \quad resp. \quad \epsilon_{i2} = -M\frac{dI_1}{dt}. \qquad (22.12)$$

22.5
Energie magnetického pole vodiče protékaného proudem I je

$$W_m = \frac{1}{2}LI^2, \qquad (22.13)$$

kde L je indukčnost vodiče.

22.6
Hustota energie magnetického pole je

napětí 1V.

Obecný vztah (22.13) pro výpočet indukčnosti vodiče se získá jednoduše spojením Biotova-Savartova-Laplaceova zákona (21.11) a definice (22.8).

$$\Phi = \int_S \boldsymbol{B}.d\boldsymbol{S} = I.\int_S \left(\oint \frac{d\boldsymbol{\ell} x \boldsymbol{r}}{\boldsymbol{r}^3} \right).d\boldsymbol{S} = iL. \qquad (22.15)$$

Indukčnost dostatečně dlouhé a tenké válcové cívky (obr. 22.6) vypočítáme tak, že najdeme přes ni procházející magnetický indukční tok. Jelikož magnetické pole v dlouhé cívce můžeme považovat za homogenní, můžeme na základě definice magnetického indukčního toku (21.58) psát

$$\Phi = \int_S \boldsymbol{B}.d\boldsymbol{S} = \int_S B\,dS = BNS, \qquad (22.16)$$

kde N je počet závitů cívky. Pro magnetickou indukci vyplývá ze zákona celkového proudu $\oint \boldsymbol{H}.d\boldsymbol{r} = \oint H\,ds = H\ell = NI$ vztah $B=\mu H=\mu\ NI/\ell$, takže pro indukčnost $L=\Phi/I$ vychází

$$L = \mu\frac{N^2 S}{\ell} = \mu n^2 V, \qquad (22.17)$$

kde jsme zavedli počet závitů na jednotku délky $n=N/\ell$ a $V=S\ \ell$ objem cívky.

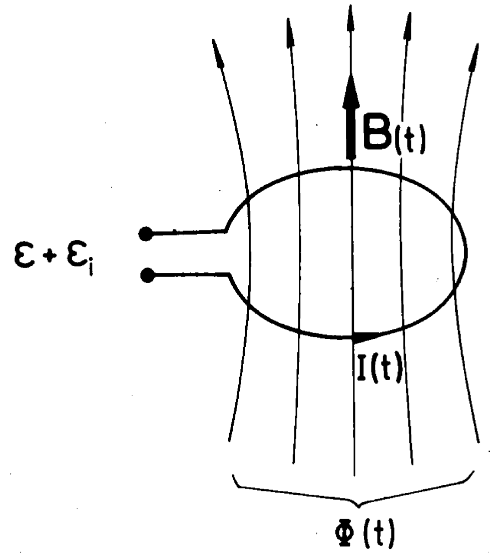
Obecný vztah pro výpočet vzájemné indukčnosti dvou vodičů (tzv. Neumannův vztah), který uvádíme bez odvození, je

$$M = \frac{\mu}{4\pi}\oint_{\ell_1}\oint_{\ell_2}\frac{d\boldsymbol{\ell}_1 \times d\boldsymbol{\ell}_2}{r}, \qquad (22.18)$$

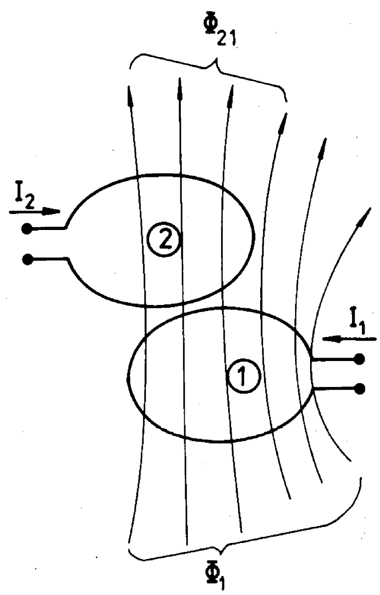
kde $d\boldsymbol{\ell}_1$ a $d\boldsymbol{\ell}_2$ jsou elementy obou vodičů.

Vzájemná indukčnost dvou souosých válcových tenkých cívek (obr. 22.7) se jednoduše stanoví na základě spřaženého toku mezi cívkou 1

$$w_m = \frac{1}{2} \boldsymbol{H}.\boldsymbol{B}. \qquad (22.14)$$



Obr. 22.4 K jevu vlastní indukce



Obr. 22.5 K jevu vzájemné indukce

a 2 $\Phi_{21}=B_1S_2N_2=\mu n_1 I_1 S_2 N_2$, kde B_1 je magnetická indukce odpovídající proudu I_1, který prochází N_1 závity 1. cívky. Označíme-li tedy ℓ délku osy společnou oběma cívkám, bude $N_2=\ell n_2$ a vzájemnou indukčnost obou cívek

$$M = \frac{\Phi_{21}}{I_1} = \mu\, n_1 n_2 \ell S_2 = \mu\, n_1 n_2 V. \qquad (22.19)$$

Elementární úvahou najdeme vzájemnou indukčnost dvou těsně svázaných cívek, tj. cívek, kterými prochází stejný indukční tok. Jestliže prvou cívkou protéká proud I_1, druhou proud I_2, jsou indukční toky jednotlivými cívkami $\Phi=L_1 I_1+MI_1$. Představme si pro jednoduchost, že např. druhá cívka je zkratovaná a její elektrický odpor je zanedbatelný, pak musí platit, že celkové indukované elektromotorické napětí ϵ_2 v této druhé cívce je nulové, neboli $-MdI_1/dt - L_2 I_2=0$. Pokud předpokládáme stejné časové průběhy obou proudů I_1 a I_2 bude platit i rovnice $MI_1+L_2I_2=0$ a rovněž vzhledem k rovnosti magnetických toků oběma cívkami $MI_2+L_1\ I_1=0$. Z obou těchto rovnic vyplývá vztah pro vzájemnou indukčnost dvou těsně vázaných cívek o indukčnosti L_1 a L_2.

$$M = (L_1 L_2)^{\frac{1}{2}}.$$

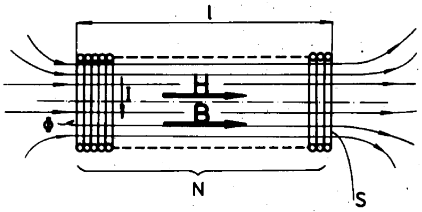
Stanovme si poměr napětí indukovaných v obou cívkách za předpokladu $I_2=0$,

$$\frac{|\epsilon_{i1}|}{|\epsilon_{i2}|} = \frac{L_1 \frac{dI_1}{dt}}{M \frac{dI_1}{dt}} = \frac{L_1}{(L_1 L_2)^{\frac{1}{2}}} = \left(\frac{L_1}{L_2}\right)^{\frac{1}{2}},$$

což značí, že s ohledem na vztah (22.17) při stejné délce a stejných plochách průřezů obou cívek bude

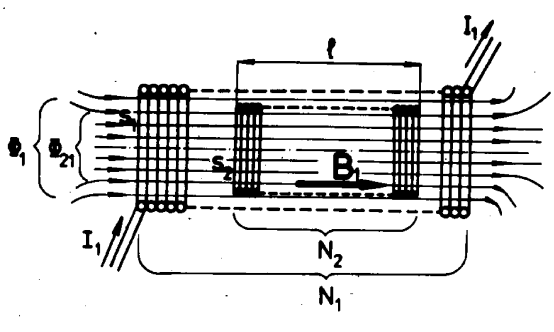
$$\left|\frac{\epsilon_{i1}}{\epsilon_{i2}}\right| = \frac{N_1}{N_2}\,.$$

Soustava dvou těsně svázaných cívek tvoří transformátor. Podle právě odvozeného vztahu se poměr elektromotorických napětí na primární a sekundární cívce přibližně rovná poměru počtu závitů, čehož se využívá při "transformování" napětí. Ve skutečnosti jsou poměry v transformátoru podstatně složitější, protože musíme vzít v úvahu i odpory cívek a jiné vlivy.



Obr. 22.6 K odvození indukčnosti válcové cívky

Jev vlastní indukce můžeme vysvětlit i z hlediska energie. Jestliže si představíme obvod na obr. 22.8, nemůže proud ihned po zapnutí klíče nabýt konečné hodnoty, protože s jeho existencí je spojena existence magnetického pole, které má jistou energii. Při konečném výkonu zdroje elektromotorického napětí je proto třeba konečné doby k vytvoření magnetického pole. Energii magnetického pole vzbuzeného proudem I procházejícím vodičem s indukčností L můžeme snadno vypočítat jako práci, kterou vynaložil zdroj elektromotorického napětí ϵ na překonání indukovaného elektromotorického napětí ϵ_i, které v něm vzniká vlastní indukcí při vzrůstání proudu z nuly na maximální ustálenou hodnotu. Při přenesení náboje $dQ=Idt$ proti indukovanému elektromotorickému napětí ϵ_i vykoná zdroj práci (srovnej se vztahem /20.27/)



Obr. 22.7 K odvození vzájemné indukčnosti dvou souosých válcových cívek

$$dW_m = -\epsilon_i I dt = -\left(-L\frac{dI}{dt}\right) I$$

Integrujeme-li tedy od I=0 do ustálené hodnoty I proudu, dostaneme energii potřebnou k vytvoření magnetického pole

$$w_m = LI\ dI = \frac{1}{2}\ LI^2,$$

což je energie magnetického pole vodiče protékaného proudem I (22.13).

.

Z předchozího vztahu lehce vyjádříme i vztah pro hustotu energie magnetického pole (22.14). Jestliže stanovíme energii magnetického pole tenké cívky protékanou proudem I podle vztahu (22.17)

$$W_m = \frac{1}{2}\mu n^2 V I^2$$

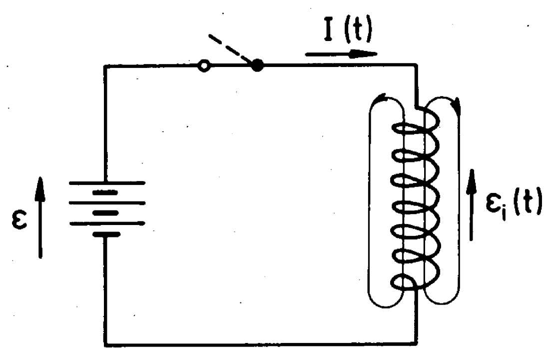
a dále, jestliže si uvědomíme, že magnetické pole tenké cívky je přibližně soustředěno pouze uvnitř cívky, kde je přibližně homogenní s průměrnou intenzitou magnetického pole $H=nI$, můžeme energii magnetického pole této cívky psát

$$W_m = \frac{1}{2}\mu H^2 V.$$

Hustota energie magnetického pole je tedy

$$w_m = \frac{Wm}{V} = \frac{1}{2}\mu H^2 = \frac{1}{2}HB,$$

což ve vektorovém tvaru vyjadřuje vztah (22.14)



Obr. 22.8 Vznik elektromotorického napětí v cívce

HENRY Joseph, 1797-1878, americký fyzik. Jeho vědecké práce jsou zaměřeny na elektromagnetismus. Jako prvý zkonstruoval elektromagnety o značné přitažlivé síle (1828), vynalezl elektrický motor (1831), objevil jev vlastní indukce (1832), vynalezl elektromagnetické relé. Sestrojil telegraf. Na jeho počest je pojmenována jeho jménem jednotka vlastní indukčnosti.

EDISON Thomas Alva (edysn), 1847-1931, americký vynálezce a průkopník všestranného využití elektřiny. Získal na 1300 patentů, ze kterých některé mají základní význam: telegraf, mikrofon, fonograf, žárovka, elektrická lokomotiva, elektroměr, dynamo, elektrárna, pojistka, vrtulník, elektrický akumulátor aj.

22.3 Střídavý elektrický proud

Vznik elektromotorického napětí mechanickým pohybem vodiče v magnetickém poli nabízí velmi výhodný způsob výroby elektrické energie. Jestliže bychom však chtěli tímto způsobem nahradit tdroje založené na cizích silách difúzního, chemického a jiného původu (baterie), tj. zdroje stálého napětí, museli bychom podle vztahu (22.2) pohybovat vodičem stálou rychlostí v homogenním magnetickém poli. Takový proces se z pochopitelných příčin nedá trvale realizovat. V úvahu přichází jen rotační mechanický pohyb, avšak ten má, jak uvidíme, za následek vznik časově elektromotorického proměnlivého (věta 22.7) napětí. Ukázalo se však, že to je spíše výhoda než nevýhoda, (věty 22.8 až 22.11).

22.7

Otáčením závitu (cívky) v homogenním magnetickém poli vzniká harmonické elektromotorické napětí

$$\epsilon_i = \epsilon_o \sin \omega t, \qquad (22.20)$$

kde ω je úhlová rychlost otáčení.

22.8

Elektrický obvod, v kterém protéká harmonický elektrický proud, se obecně skládá ze tří idealizovaných prvků: rezistoru, kapacitoru a induktoru, které jsou popsány veličinami R - rezistancí (odpovídající veličina pro stejnosměrný proud odpor R /20.5/), C - kapacitou a L - indukčností. Celkový "odpor" obvodu, složeného ze seriového zapojení těchto prvků se nazývá impedance Z a je určená vztahem

Uvažujme o jednoduchém závitu plochy S, který se otáčí úhlovou rychlostí ω v homogenním magnetickém poli, časově neproměnném (obr. 22.9). Podle Faradayova zákona se v něm indukuje elektromotorické napětí

$$\epsilon_i = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt}(\boldsymbol{B}.\boldsymbol{S}) =$$

$$= -\frac{d}{dt}(BS \cos \omega t) = \epsilon_o \sin \omega t,$$

kde $\epsilon_0 = BS\,\omega$ je amplituda elektromotorického napětí. Toto napětí vyvolává v zátěži tvořené rezistorem harmonický proud

$$I = \frac{\omega_o}{R} \sin \omega t. \qquad (22.25)$$

Ukazuje se však, že v obvodu se střídavým proudem se zpravidla nesetkáváme jen s rezistory, které jsme zavedli pro stejnosměrný proud. I když v obvodě nejsou zjevně zapojeny žádné induktory

$$Z = \left[R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}.$$

(22.21)

Pokud se elektrický obvod skládá z reálných prvků, hovoříme o kondenzátoru a cívce, které jsou pak popsány nejen kapacitou (indukčností) C, ale i určitou rezistancí R.

22.9

V obvodu s harmonickým proudem vzniká fázové posunutí φ proudu za napětím určené funkcí

$$tg\ \varphi = \frac{\omega L - \dfrac{1}{\omega C}}{R}. \qquad (22.22)$$

22.10

Efektivní hodnota harmonického proudu I_e je definována jako taková hodnota stejnosměrného proudu, kterým se při jeho průchodu lineárním rezistorem vyvine za jednu periodu stejné množství tepla jako uvažovaným harmonickým proudem za stejný čas. Platí

$$I_e = \frac{I_o}{\sqrt{2}} = 0{,}707\ I_o, \qquad (22.23)$$

kde I_O je amplituda proudu. Podobný vztah platí i pro napětí.

22.11

Výkon harmonického proudu je

(cívky), indukuje se v samotném vodiči elektromotorické napětí. Kromě toho, jak uvidíme, mohou být součástí obvodu s trvale protékajícím střídavým (harmonickým) proudem, na rozdíl od obvodů se stejnosměrným proudem i kapacitory (kondenzátory). Obecně tedy máme v obvodu s harmonickým proudem dva zdroje elektromotorického napětí (obr. 22.10) a sice vnější zdroj s elektromotorickým napětím ϵ_L=-$L\ dI/dt$.

Musí tedy platit II.Kirchhoffův zákon, který pro obvod s harmonickým proudem má tvar

$$\epsilon + \epsilon_L = U_C + U_R,$$

kde U_C je napětí na kapacitoru, pro které platí U_C=Q/C a U_R je napětí na rezistoru U_R=IR. Můžeme tedy psát

$$\epsilon_o \sin \omega t - L\frac{dI}{dt} = \frac{Q}{C} + IR. \qquad (22.26)$$

Jestliže provedeme derivaci rovnice (22.26) podle času a uvědomíme-li si, že platí I=dQ/dt, získáme diferenciální rovnici pro proud

$$L\frac{d^2 I}{dt^2} + R\frac{dI}{dt} + \frac{1}{C}\ I = \frac{d}{dt}\ (\epsilon_o \sin \omega t).$$

(22.27)

Tuto rovnici můžeme nejjednodušeji vyřešit použitím komplexní proměnné. Místo skutečného napětí zavedeme komplexní napětí (elmot. napětí)

$$\epsilon^x = \epsilon_o(\cos \omega t + i \sin \omega t) = \epsilon_o e^{i\omega t}$$

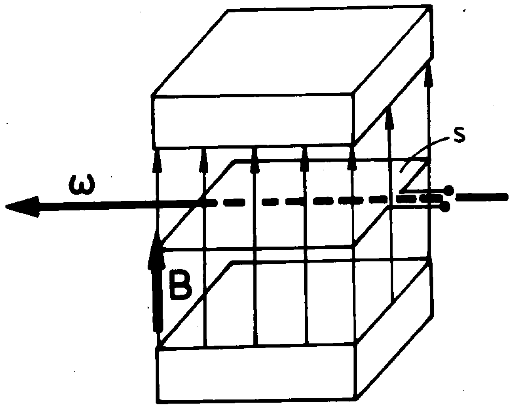
(22.28)

a místo reálného proudu komplexní proud I^x.

$$P=\frac{U_o I_o}{2}\cos\varphi=U_e I_e\cos\varphi\,,$$

(22.24)

kde φ je fázové posunutí proudu a napětí. Funkce $\cos\varphi$ se nazývá účiník.



Obr. 22.9 Vznik harmonicky proměnného elektromotorického napětí

Skutečným řešením při použití komplexního napětí a proudu pak bude např. absolutní hodnota imaginární části komplexních veličin.

Rovnice (22.27) má v nových proměnných tvar

$$L=\frac{d^2I^x}{dt^2}+R\frac{dI^x}{dt}+\frac{1}{C}I^x=\frac{d\epsilon^x}{dt}$$

(22.29)

a její řešení pro ustálený stav můžeme navrhnout ve tvaru

$$I^x=I_o[\cos(\omega t-\varphi)+i\ \sin\ (\omega t-\varphi)=$$
$$=I_o e^{\,i}(\omega t-\varphi).$$

(22.30)

Dosazením tohoto řešení do rovnice (22.29) dostaneme pro komplexní proud výraz

$$I^x=\frac{\epsilon^x}{R+i\left(\omega L-\dfrac{1}{\omega C}\right)}=\frac{\epsilon^x}{Z^x}=\frac{\epsilon_o e^{i\omega t}}{Ze^{\,i}\varphi}.$$

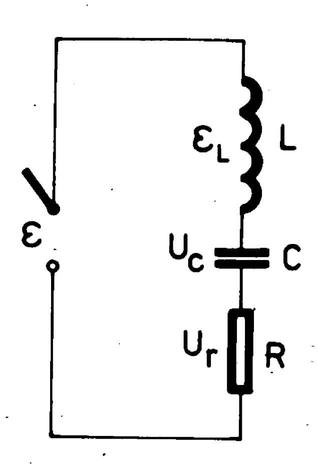
(22.31)

Komplexní veličina $Z^X=R+i(\supset L - 1/\supset C)$ se nazývá impedance a její absolutní hodnota je

$$Z=[R^2+(\omega L-1/\omega C)^2]^{\frac{1}{2}}.$$

(22.32)

Absolutní hodnota impedance Z má význam celkového odporu obvodu, protože z rovnice (22.31) vyplývá i rovnice



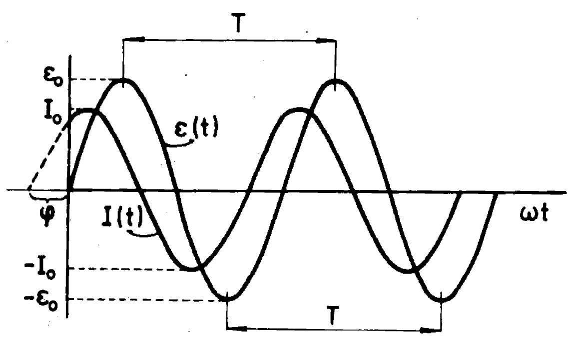
Obr. 22.10 Seriový obvod tvořený rezistorem, induktorem a kapacitorem

$$I_o = \frac{\epsilon_o}{\left[R^2 + \left(L - \frac{1}{C}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}} = \frac{\epsilon_o}{Z}. \qquad (22.33)$$

Hledané řešení rovnice (22.27) je absolutní hodnota imaginární složky funkce (22.30), tj.

$$I = I_o \sin(\omega t - \varphi) = \frac{U_o}{Z} \sin(\omega t - \varphi), \qquad (22.34)$$

přičemž fázové posunutí proudu I za elektromotorickým napětím ϵ:ѽ je rovno modulu impedance Z^X. Je tedy určené vztahem



Obr. 22.11 Fázový posuv proudu a elektromotorického napětí v obvodě se střídavým proudem

$$tg\ \varphi = \frac{\left(\omega L - \dfrac{1}{\omega C}\right)}{R}. \tag{22.35}$$

Fázové posunutí proudu a napětí φ může být kladné (je.li $\omega L > 1/\omega C$) i záporné (je-li $\omega L < 1/\omega C$) (obr. 22.11). Proud tedy zaostává za napětím, je-li v obvodu převládající indukční zátěž a předbíhá napětí, je-li v obvodu převládající kapacitní zátěž. Je-li rezistance R zanedbatelná, je v těchto dvou krajních případech fázový posuv 1$\varphi = \pm\pi/2$. Proud je ve fázi s napětím, jestliže platí

$$\omega L = \frac{1}{\omega C}, \tag{22.36}$$

tj. jestliže je splněno $\omega^2 = 1/LC$, resp. pro periodu $T = 2\pi/\omega = 2\pi(LC)^{1/2}$. Říkáme, že obvod je v rezonanci s vnějším harmonickým elektromotorickým napětím. Tím jsme dokázali tvrzení vět 22.8 a 22.9.

Vztah (22.23) dokážeme na základě definice 22.10 tak, že vypočítáme střední hodnotu okamžitého výkonu harmonického proudu za čas jedné periody

$$P_s = \frac{1}{T}\int_o^T RI^2\,dt = \frac{R}{T}\int_o^T I_o^2\ \sin^2\ \omega\,t\,dt = \frac{RI_o^2}{T}\int_o^T \frac{1 - \cos\ 2\omega\,T}{2}\,dt = \frac{R}{} \tag{22.37}$$

Podle definice 22.10 se má tento výkon rovnat výkonu stejnosměrného proudu I_s, proto platí rovnice $Ri_e^2 = RI_o^2/2$, z které vyplývá vztah (22.23). Efektivní hodnota harmonického napětí U_e je v tomto případě obdobně vázána s efektivní hodnotou proudu I_e Ohmovým zákonem

$$U_e = RI_e = \frac{RI_o}{\sqrt{2}} = \frac{U_o}{\sqrt{2}}.$$

Výkon harmonického proudu je ovlivněn tím, že proud je obecně fázově posunutý vzhledem k napětí. Při $U = U_o$ sin (ωt) je $I = I_o$ sin (ωt-φ), takže střední hodnota okamžitého výkonu za čas jedné periody je

$$P_s = \frac{1}{T}\int_o^T UI\,dt = \frac{1}{T}\int_o^T U_o I_o\ \sin\ \omega\,t.\sin\ (\omega\,t - \varphi)\,dt.$$

Rozepsáním funkce sin (ωt-φ) podle součtové věty a použitím podobné úpravy jako v případě odvození vztahu

(22.37) dostaneme výsledek

$$P_s = \frac{U_o I_o}{2} \cos\ \varphi = U_e I_e\ \cos\ \varphi\ ,$$

který je totožný se vztahem (22.24). Při čistě kapacitní resp. indukční zátěži, je-li $\varphi=\pm\pi/2$ se tedy obvodu neodevzdává z vnějšího zdroje žádný výkon (jinými slovy žádná z vnějšího zdroje dodaná energie se namění v obvodu na teplo ani nekoná práci). Na druhé straně se pro hospodárnější využívání elektrické energie musí udržovat cos φ co nejbližší 1, což značí, že v obvodu musí být přibližná rovnováha mezi kapacitní a induktivní zátěží.

22.4 Oscilační obvod a vyzařování elektromagnetické energie

Zdrojem elektromagnetického pole, přesněji zdrojem elektromagnetického vlnění požadované frekvence může být oscilační obvod, věty (21.12 a 21.13). Základem činnosti těchto zdrojů je skutečnost, že každý se zrychlením se pohybující elektrický náboj vysílá do okolí elektromagnetickou energii (věta 22.14).

22.12
Oscilačním obvodem nazýváme obvod skládající se z kapacitoru a z induktoru, v kterém jsou vytvořeny podmínky pro vznik harmonicky proměnného proudu.

22.13
Po uzavření oscilačního obvodu s nabitým kapacitorem se v obvodu vytvoří proudové oscilace popsané funkcí

$$I = I_o\ \sin\ \omega\, t, \qquad (22.38)$$

přičemž platí pro úhlový kmitočet

$$\omega = \frac{1}{(LC)^{\frac{1}{2}}} \qquad (22.39)$$

22.14
Elektrický náboj q pohybující se se zrychlením a vyzařuje do okolí elektromagnetickou vlnu. Energie přenášená elmg. vlnou za jednotku času je

Uvažujme o obvodu znázorněném na obr. (22.12). Jelikož obvod není připojen na zdroj vnějšího elektromotorického napětí a rezistance obvodu je podle předpokladu nulová, děje probíhající v obvodu popisuje podle (22.27) diferenciální rovnice

$$\frac{d^2 I}{dt^2} + \omega^2 I = 0$$
$$kde$$
$$\omega = \frac{1}{(LC)^{\frac{1}{2}}}. \qquad (22.43)$$

Tato rovnice je zcela totožná s rovnicí pro harmonický pohyb (13.22). Její řešení můžeme proto napsat ve tvaru

$$I = I_o\ \sin\ (\omega\, t - \varphi). \qquad (22.44)$$

Jestliže uvážíme, že v čase t=0 je I=0, vychází φ=0 a funkce (22.44) přejde na tvar (22.38), což jsme měli dokázat. Tato funkce představuje elektrické kmity, které v oblasti mezi deskami kondenzátoru

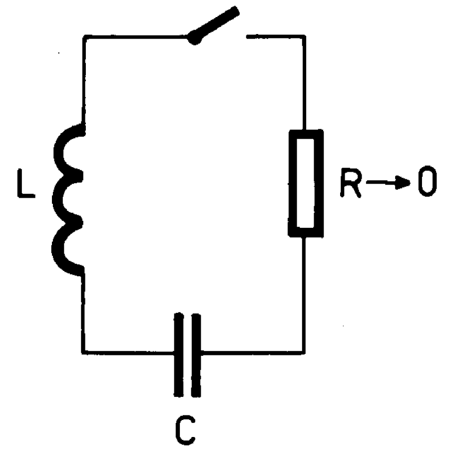
$$\frac{dW}{dt} = \frac{\mu_o\, q^2\, a^2}{\sigma\ \pi\ c}. \qquad (22.40)$$

Elementární elektrický dipól s elektrickým momentem $p=q\ell=q\ell_0 \sin \omega t$ vyzařuje do okolí elektromagnetickou vlnu. Střední hodnota energie přenášená elmg. vlnou za jednotku času je

$$\frac{dW_s}{dt} = \frac{\mu_o\, q^2\, \ell_o^2\, \omega^4}{12\ \pi\ c}. \qquad (22.41)$$

Obdobně pro magnetický dipól s magnetickým momentem $m=IS \sin \omega t = m_0 \sin \omega t$

$$\frac{dW_s}{dt} = \frac{\mu_o\, m_o^2\, \omega^4}{12\ \pi\ c}. \qquad (22.42)$$



Obr. 22.12 Oscilační obvod

zapříčiňují střídavé změny vektoru ***D*** a ***B***, tj. elektromagnetické vlnění. Jestliže desky kondenzátoru rozšíříme, vznikne obdobné vlnění v relativně větším prostoru a jestliže obvod otevřeme úplně (obr. 22.13), dostaneme tzv. anténu, z které se (podle věty 22.14) elektromagnetické vlny šíří do celého prostoru.

Větu 22.14 a platnost příslušných vztahů dokážeme pomocí vztahu (21.9), který můžeme přepsat do tvaru

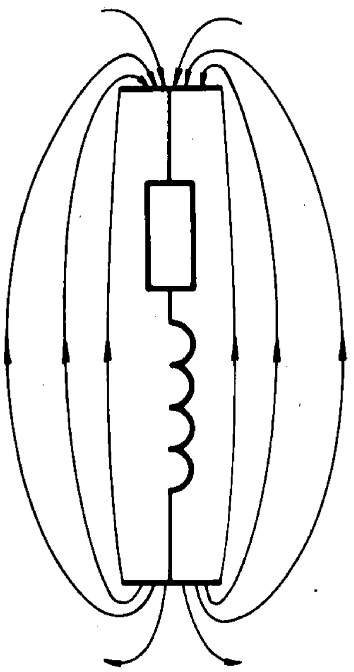
$$\boldsymbol{B} = \frac{\mu_o}{4\pi}\ \frac{q\ \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{r}}{r^3}.$$

Náboj q vyvolává tedy za pohybu magnetické pole o indukci

$$B = \frac{\mu_o q}{4\pi}\ \frac{v \sin \alpha}{r^2}.$$

kde α je úhel sevřený vektorem rychlosti $\boldsymbol{v}$ a polohovým vektorem $\boldsymbol{r}$. Předpokládejme nyní, že náboj q byl na začátku v klidu a potom začal z nějakých příčin svou rychlost zvašovat. Následkem zrychlení se začne v jeho okolí generovat postupně narůstající magnetické pole, jehož indukce je v čase t_0 určená výrazem $B(t_0)=\int_0^t (dB/\mathrm{d}t)\, dt$. Musíme však uvážit, že magnetická složka elektromagnetické vlny se nešíří do okolí nekonečnou rychlostí, ale konečnou rychlostí světla c.

Pozorovatel v místě $\boldsymbol{r}$ a v čase t_0 tedy zaregistruje magnetické pole, které se generovalo zdrojem v čase $t'=t_0-r/c$. Při výpočtu $B(t_0)$ podle uvedeného vztahu tedy musíme integrovat podle času t'. Dostaneme tak vztah



Obr. 22.13 Vznik antény z oscilačního obvodu

$$B=\int_0^{t_o}\frac{dB}{dt'}dt'=$$

$$=\frac{\mu_o\, q\,\sin\alpha}{4\pi}\int_0^{t_o}\left(\frac{a}{r^2}-\frac{2v}{r^3}\frac{dr}{dt'}\right)dt',$$

(22.45)

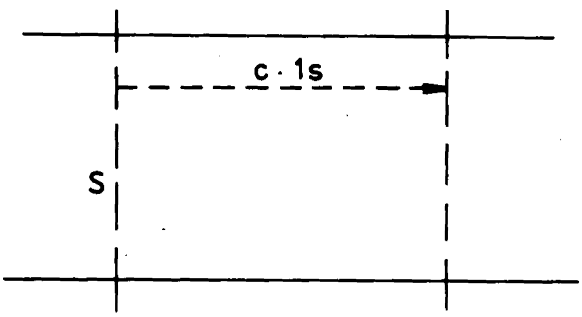
kde a=*dv*/*dt*' je zrychlení.

Jestliže se rozhodneme měřit vyzařovaný výkon v dostatečně velké vzdálenosti od zdroje, můžeme druhý člen v závorce vzhledem k prvému zanedbat a integrál přes *t'* s využitím vztahu *dt*'=-*dr/c* převést na integrál přes proměnnou *r*. Jestliže předpokládáme, že čas t_0 je podstatně větší než čas *t*', po který se šíří světlo od zdroje k pozorovacímu bodu, můžeme horní hranici integrálu položit

$$B(t_o)=\frac{\mu_o\, q\,\sin\alpha}{4\pi}\int_\infty^{r}\left(-\frac{a}{dr^2}\right)dr=$$

$$=\frac{\mu_o\, q\,\sin\alpha}{4\pi}\,\frac{a}{cr}.$$

(22.46)



Obr. 22.14 K odvození vztahu pro intenzitu záření

$r_0=ct_0\rightarrow\infty$. Dostaneme tak výsledek

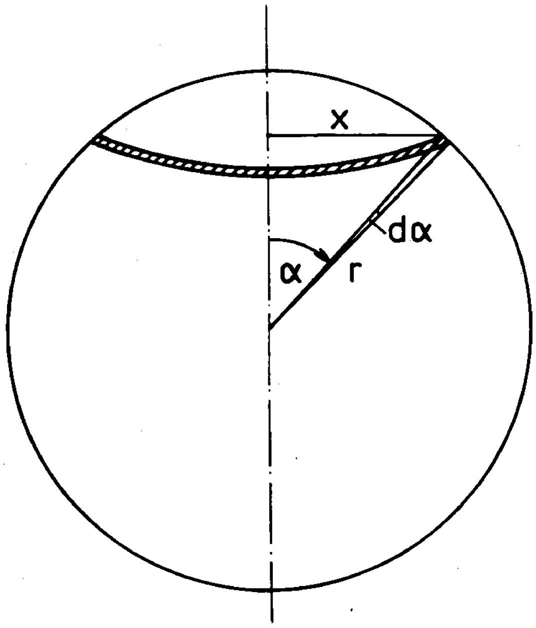
Podle vztahu (22.14) je hustota energie související s magnetickou složkou elektromagnetického pole vyjádřená vztahem w_m=(H.B)/2, takže v našem případě je

$$w_m=\frac{\mu_o H^2}{2}=\frac{\mu_o\, q^2\, a^2\,\sin^2\alpha}{2(4\pi)^2\, c^2\, r^2}.$$

(22.47)

Podle obr. 22.14 lehce zjistíme, že za jednotku času projde ve směru šíření plochou S energie obsažená v objemu *S.c*, tj. energie (zatím jen magnetického pole). Jednotkovou plochou tedy projde za jednotku času energie *dW*/*dS dt*=*c*w_m, pro kterou platí

$$\frac{dW}{dt\,dS} = \frac{\mu_o\, q^2\, a^2\, \sin^2 \alpha}{2(4\pi)^2\, c\, r^2}. \qquad (22.48)$$



Obr. 22.15 K vyjádření plošného elementu na povrchu koule

Celkovou vyzářenou energii za jednotku času dostaneme součtem všech příspěvků na povrchu koule s poloměrem r, v jejíž středu se nachází zdroj záření. Pro integraci je výhodné zvolit plošný element ve tvaru vyznačeném na obr. 22.15, takže $dS = 2\pi\, x\, r\, d\,\alpha = 2\pi r^2 \sin\alpha\, d\alpha$. Pro celkovou energii vyzářenou za jednotku času dostaneme

$$\frac{dW}{dt} = \frac{\mu_o\, q^2\, a^2\, \pi}{(4\pi)^2\, c} \int_o^\pi \sin^3 \alpha\, d\,\alpha.$$

Můžeme lehce dokázat, že v tomto vztahu vystupující integrál má hodnoptu 4/3, takže jestliže ještě uvážíme, že energie elektromagnetické vlny má kromě magnetické složky ještě stejně velkou elektrickou složku, dojdeme lehce ke vztahu (22.40).

Vztah (22.41) vyjadřující střední hodnotu energie vyzářené elektrickým dipólem je jednoduchou modifikací vztahu (22.40). Pro elektrický dipól, který kmitá s úhlovým kmitočtem ω můžeme psát

$$q^2\, a^2 = q^2 \left(\frac{dx^2}{dt^2}\right)^2 = q^2\, \ell_o^2\, \omega^4 \sin^2 \omega\, t.$$

Střední hodnota tohoto výrazu je

$$\frac{1}{T}\int_0^T q^2\, a^2 = q^2\, \ell_o^2\, \omega^4 \left(\frac{1}{T}\int_0^T \sin^2 \omega\, t\, dt\right) = \frac{q^2\, \ell_o^2\, \omega^4}{2}, \qquad (22.49)$$

z čehož již vyplývá vztah (22.41). Obdobný výraz můžeme získat i pro vyzařování magnetického dipólu (22.42). Tím jsme i dokázali, že reálný oscilační obvod vyzařuje elektromagnetickou vlnu charakterizovanou úhlovým kmitočtem (22.39). Směrové vlastnosti antén jsou však popsány vztahem (22.48), z kterého vyplývá, že např. elektrický dipól nejvíce vyzařuje ve směru kolmém na vektor dipólového momentu a nevyzařuje ve směru dipólového momentu.

Poznámka:

Vztahy odvozené v tomto článku se dokonale ověřily v případě makroskopických diúólů, avšak úplně selhaly při aplikaci na mikrofyzikální dipóly, např. na elektron obíhající kolem jádra atomu. Zákonitosti týkající se vyzařování takových mikrofyzikálních dipólů objevil Bohr a v úplném rozsahu objasnila kvantová fyzika (část VII).

22.5 Maxwellovy rovnice

Zobecněním experimentálních poznatků a díky geniální intuici dospěl Maxwell ke čtyřem základním rovnicím popisujícím elektrické, magnetické a elektromagnetické pole (věta 22.15).

22.15

Maxwellovy rovnice jsou:

$$div\ \boldsymbol{D} = \rho\,, \tag{22.50}$$

$$div\ \boldsymbol{B} = 0\,, \tag{22.51}$$

$$rot\ \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}\,, \tag{22.52}$$

$$rot\ \boldsymbol{H} = \boldsymbol{i} + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}\,. \tag{22.53}$$

K těmto rovnicím se přidávají ještě tři rovnice, které v izotropním prostředí mají tvar

$$\boldsymbol{D} = \epsilon\ \boldsymbol{E}\,, \tag{22.54}$$

$$\boldsymbol{B} = \mu\ \boldsymbol{H}\,, \tag{22.55}$$

$$\boldsymbol{i} = \partial\ \boldsymbol{E}\,. \qquad 2(2.56)$$

Všechny čtyři Maxwellovy rovnice jsme již odvodili s vyjímkou poslední rovnice, která byla rovněž odvozena, avšak bez druhého členu na pravé straně. Prvá rovnice vyplývá z Coulombova zákona (nebo z Gaussovy věty), druhá rovnice je zobecněním Biotova-Savartova-Laplaceova zákona, třetí rovnice vyplynula z Faradayova zákona elektromagnetické indukce a poslední ve tvaru rot $\boldsymbol{H}$=$\boldsymbol{i}$ vyplynula z Ampérova zákona celkového proudu.

Doplnění čtvrté rovnice o člen $\delta\boldsymbol{D}/\delta$t můžeme podpořit úvahou založenou rovnici kontinuity elektrického proudu (20.9). Tuto rovnici , jelikož platí div d=ρ, můžeme přepsat i do tvaru

$$div\ \boldsymbol{i} + \frac{\partial}{\partial} t\ (div\ \boldsymbol{D}) = div\ \left(\boldsymbol{i} + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}\right) = 0\,. \tag{22.58}$$

Vidíme, že i výraz $\delta\boldsymbol{D}/\delta t$ má rozměr hustoty proudu $\boldsymbol{i}$ a odpovídá zdánlivému proudu, který protéká např. mezi deskami kondenzátoru, je-li připojen na zdroj časově proměnného elektromotorického napětí. Nazývá se "posuvný" nebo Maxwellův proud. Maxwell vyslovil předpoklad, že tento proud je z hlediska generace magnetického pole rovnocenný proudu volných nosičů náboje, a proto je nutno příslušnou rovnici psát v obecnějším tvaru

22.16

Maxwellem intuitívně zavedený člen se nazývá Maxwellův posuvný proud, jehož hustota $\boldsymbol{i}_{\mathrm{p}}$ je

$$\boldsymbol{i}_p = \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} \qquad (22.57)$$

MAXWELL James Clerk (mexvel), 1831-1879, anglický fyzik, jedna z nejvýznamějších osobností ve vědě 19. století. Prvé vědecké práce z fyziky publikoval ještě jako student (z pružnosti a optiky). Později se zabýval kinetickou teorií plynů a odvozením rozdělovacího zákona molekul plynu podle rychlosti, výrazně přispěl k jejímu dalšímu rozvoji. Jeho hlavním životním dílem byly však práce z elektromagnetizmu. Vyšel z Faradayových myšlenek o silovém poli, zobecnil do té doby nahromaděné poznatky o elektrických a magnetických jevech a r. 1864 podal úplnou formulaci teorie elektromagnetického pole, zahrnutou do čtyř základních rovnic. Tato teorie zahrnovala v sobě i existenci elektromagnetického vlnění. Maxwellovy vědecké práce značně urychlily nejen rozvoj fyziky, ale i aplikace v elektrotechnice.

$$rot\ \boldsymbol{H} = \boldsymbol{i} + \boldsymbol{i}_o = \boldsymbol{i} + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}\,.$$

(22.59)

Tímto rozšířením získaly Maxwellovy rovnice jistou symetrii, která je patrná zejména tehdy, jestliže se aplikují na dielektrika, v kterých je splněno i=0 a ρ=0. Pro tento případ je můžeme napsat ve tvaru

$$div\ \boldsymbol{D} = 0 \qquad rot\ \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}$$

$$div\ \boldsymbol{B} = 0 \qquad rot\ \boldsymbol{H} = \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}\,.$$

Až na nepodstatný znaménkový rozdíl (který by se dal odstranit např. definicí indukčního toku vztahem Φ=-$\boldsymbol{B}.d\boldsymbol{S}$) jsou tyto rovnice z hlediska elektrického a magnetického pole zcela rovnocenné a značí, že žádné z těchto polí není privilegované. Změna jednoho z nich vyvolává druhé a naopak. V tomto smyslu jsou elektrické a magnetické pole jen zvláštním případem jedné z forem existence hmoty - elektromagnetického pole.