

## Laboratórna úloha č. 22

# Fázová a grupová rýchlosť v kvapalinách

**Úloha:** Odmerať fázovú a grupovú rýchlosť ultrazvuku vo vode.

### Teoretický úvod

Šírenie sa harmonického vlnenia v smere osi  $x$  môžeme opísať vlnovou funkciou

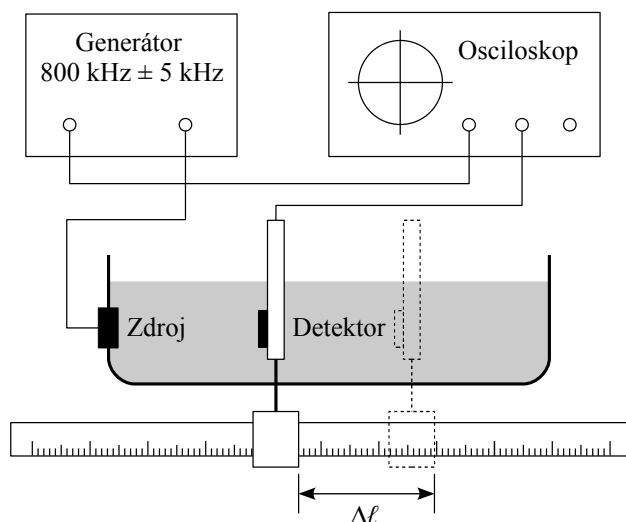
$$y = y_0 \sin \left[ 2\pi f \left( t \pm \frac{x}{v_f} \right) \right] \quad (1)$$

kde  $y$  je okamžitá výchylka hmotného elementu z rovnovážnej polohy v danom mieste,  $f$  je frekvencia vlnenia,  $v_f$  je fázová rýchlosť vlnenia.

Fázová rýchlosť  $v_f$  je rýchlosť, akou sa šíri fáza monochromatickej vlny. Pre fázovú rýchlosť platí:

$$v_f = \frac{\omega}{k} = \lambda f \quad (2)$$

kde  $\lambda$  je vlnová dĺžka – je to vzdialenosť medzi dvomi najbližšími bodmi prostredia, ktoré sú v tom istom čase vo fáze;  $\omega$  je uhlová frekvencia,  $k$  je vlnové číslo.



Grupová rýchlosť  $v_g$  charakterizuje rýchlosť šírenia sa amplitúdy skupiny (grupy) vln a rýchlosť prenosu energie vlnením. Je definovaná vzťahom:

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} \quad (3)$$

Súvis medzi obidvomi rýchlosťami udáva vzťah

$$v_g = v_f - \lambda \frac{dv_f}{d\lambda} \quad (4)$$

Kvapalina	$v_f$ (m . s <sup>-1</sup> )	$v_g$ (m . s <sup>-1</sup> )
glycerol	1880	1900
nasýtený roztok NaCl	1800	1800

Tabuľka 1: Fázové a grupové rýchlosti glycerolu a nasýteného roztoku NaCl.

## Meranie fázovej rýchlosti

Meranie je nepriame a vychádza zo vzťahu (2). Pri určení vlnovej dĺžky  $\lambda$  postupujeme takto: Vlnenie v mieste  $x_1$  a čase  $t$  sa vyznačuje fázou  $2\pi f(t - x_1/v_f)$ , v mieste  $x_2$  v tom istom čase  $t$  s fázou  $2\pi f(t - x_2/v_f)$ . Aby častice prostredia v mieste  $x_1$  a  $x_2$  kmitali vo fáze v ľubovoľnom čase, musí pre rozdiel fáz platiť

$$2\pi f \left( t - \frac{x_1}{v_f} \right) - 2\pi f \left( t - \frac{x_2}{v_f} \right) = 2\pi m \quad (5)$$

kde  $m = 0, 1, 2, \dots$ . Po úprave dostaneme

$$x_2 = x_1 + \lambda m \quad (6)$$

čo znamená, že vlnenie v mieste  $x_2$  je vo fáze s vlnením v mieste  $x_1$  vždy, ak je miesto  $x_2$  posunuté o  $\lambda, 2\lambda, \dots$ . Zo vzťahu (6) vyplýva pre vlnovú dĺžku

$$x_2 - x_1 = \lambda m \quad (7)$$

V experimente na určenie vlnovej dĺžky  $\lambda$  vlnenia vo vode používame ultrazvukový generátor na generovanie harmonického napätia, ktoré privádzame do piezoelektrického meniča – zdroja vlnenia. Vlnenie sa šíri ako pozdĺžne v nádobe s vodou a je detekované piezoelektrickým meničom, ktorý transformuje mechanické kmity na elektrické. Obe elektrické harmonické napätia – z generátora a detektora – privádzame na vstupy dvojkanálového osciloskopu. Spúšťanie časovej základne osciloskopu sa deje interne cez kanál 2 signálom z detektora. Posúvaním detektora nastavíme na osciloskope vzájomnú polohu časových priebehov elektrických signálov na 1. a 2. kanáli tak, aby boli vo fáze. Amplitúdu signálu na 1. kanáli prispôbime buď zosilnením alebo veľkosťou výstupného napätia z generátora. Amplitúda signálu privádzaného na 2. kanál je konštantná.

**Upozornenie:** Potenciometer na ultrazvukovom generátore treba nastaviť tak, aby značka *nezasahovala* do šrafovej časti!

Pri meraní postupujeme podľa nižšie vymenovaných krokov:

- Začiatočnú polohu detektora  $\ell_1$ , v ktorej sú signály vo fáze, volíme čo najbližšie ku zdroju ultrazvuku.
- Digitálny displej zobrazujúci polohu detektora nastavíme tak, aby v začiatočnej polohe ukazoval nulu:  $\ell_1 = 0$  mm, čo je veľmi praktická voľba. Rozdiel  $\Delta\ell = \ell - \ell_1$  bude rovný  $\ell$ .

- Potom z polohy  $\ell_1$  ( $m = 0$ ) posúvame detektor do ďalších polôh  $\ell$ , pri ktorých budú signály vo fáze a zaznamenáme, koľkonásobne ( $m$ ) sa zmenila fáza o  $2\pi$ .
- Hodnoty  $\Delta\ell$ ,  $m$  zapisujeme do tabuľky 1. (Krok veličiny  $m$  zvolíme rovný číslu 5 alebo podobnej hodnote.)

Vlnovú dĺžku určíme pomocou vzťahu (7), kde za  $x_2 - x_1$  dosadíme  $\ell - \ell_1 = \Delta\ell$ . Potom platí

$$\boxed{\Delta\ell = \lambda m} \quad (8)$$

čo je lineárna závislosť medzi  $\Delta\ell$  a  $m$ . Použijeme ju ako *modelovú rovnicu* pre vyhodnotenie merania. Smernicu  $\lambda$  tejto závislosti určíme z lineárnej regresie. Jej fyzikálny význam je zrejmý – je to vlnová dĺžka vlnenia. Pri vyhodnotení lineárnou regresiou do programu nevkladáme usporiadanú dvojicu ( $m = 0$ ,  $\Delta\ell = 0$ ), nakoľko pôjde o regresiu typu  $y = bx$  a zarátaním tejto triviálnej usporiadanej dvojice by sme umelo zvýšili počet meraní a tým mierne skreslili (smerom dole) hodnotu smerodajnej odchýlky<sup>1</sup>. Daný typ regresie zahŕňa bod (0,0) už vo svojej definícii.

Výrobca udáva pre frekvenciu generátora  $f = 800$  kHz štandardnú neistotu typu B  $s_{Bf} = 5$  kHz.

Fázovú rýchlosť určíme podľa vzťahu (2). Neistotu (typu A) určenia fázovej rýchlosti získame zo vzťahu

$$s_{Av_f} = v_f \sqrt{\left(\frac{s_{A\lambda}}{\lambda}\right)^2 + \left(\frac{s_{Bf}}{f}\right)^2} \quad (9)$$

pričom  $s_{A\lambda}$  je štandardná neistota typu A vlnovej dĺžky. Keďže vlnovú dĺžku určíme ako smernicu lineárnej závislosti medzi  $m$  a  $\Delta\ell$ , tak za odhad hodnoty  $s_{A\lambda}$  zoberieme smerodajnú odchýlku smernice, ktorú určíme z regresného výpočtu.

## Meranie grupovej rýchlosti

Pri určení grupovej rýchlosti nebudeme vychádzať z definičného vzťahu, ale postupujeme tak, že odmeriame dobu  $\Delta t$ , za ktorú zvukový impulz prekoná vzdialenosť  $\Delta\ell = \ell - \ell_1$  zodpovedajúcu zmene polohy detektora. Potom

$$v_g = \frac{\Delta\ell}{\Delta t} \quad (10)$$

Skôr, ako začneme merať, odpojíme kábel zo vstupu do 2. kanála a zapojíme ho do vstupu pre externú časovú základňu. Na generátore zatlačíme gombík označujúci impulzný režim. Časová základňa osciloskopu sa spúšťa externe pomocou synchronizačného signálu generátora nastaveného na impulznú prevádzku, pri ktorej generuje elektrické impulzy s opakovacou frekvenciou 500 Hz.

Pri meraní postupujeme podľa nižšie vymenovaných krokov:

<sup>1</sup>Pokiaľ program nevyradí túto usporiadanú dvojicu automaticky. Pozri aj **Dodatkový dokument 1** na stránke Praktických cvičení.

- Detektor nastavíme čo najbližšie k zdroju – poloha  $\ell_1$ , ktorej na digitálnom displeji priradíme hodnotu 0 mm. Potom bude platiť  $\Delta\ell = \ell$ .
- Posúvaním detektora vpravo zväčšujeme jeho vzdialenosť  $\ell$  od zdroja a tým sa zväčšuje doba  $\Delta t$ .
- Detektor posúvame tak, aby sa čas zväčšoval o  $5 \mu\text{s}$  alebo rádovo podobnú hodnotu. Časová základňa s rozsahom  $10 \mu\text{s}/\text{cm}$  je nastavená a ociachovaná pomocou harmonického signálu s frekvenciou  $f = 800 \text{ kHz}$  z generátora.
- Hodnoty  $\Delta\ell$ ,  $\Delta t$  zapisujeme do tabuľky 2.

Zo vzťahu (10) vyplýva, že

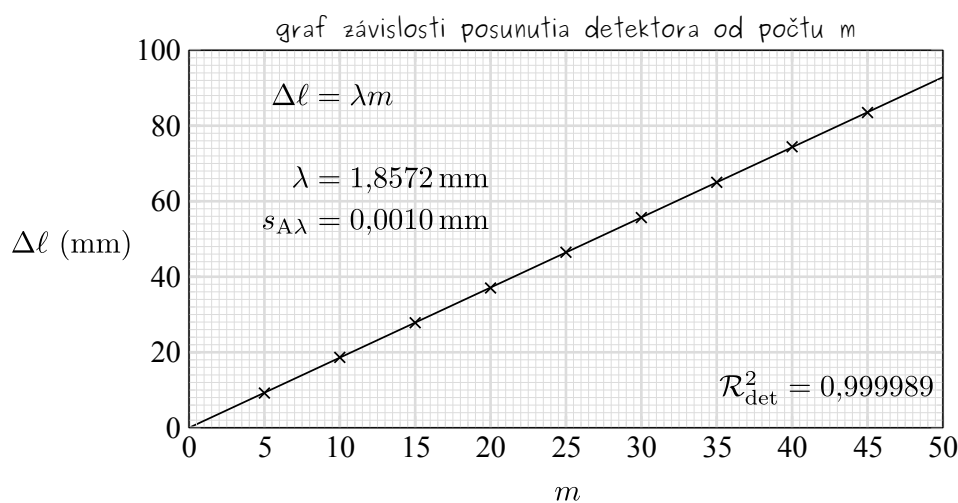
$$\Delta\ell = v_g \Delta t \quad (11)$$

Tento vzťah použijeme ako modelovú rovnicu pre vyhodnotenie merania. Je zrejmé, že  $v_g$  je smernicou závislosti  $\Delta\ell(\Delta t)$ . Hodnotu  $v_g$  teda určíme lineárnou regresiou. Aj v tomto prípade použijeme takú regresiu, ktorá priamke nanúti prechádzať presne počiatkom súradnicovej sústavy. Preto ani tu pri regresnom vyhodnotení nevkladáme do programu usporiadanú dvojicu (0,0). Z regresie vypočítame aj smerodajnú odchýlku smernice, ktorú budeme považovať za odhad štandardnej neistoty  $s_{Av_g}$  (typu A) určenia grupovej rýchlosti.

Ak v experimente zistíme, že grupová rýchlosť je (v rámci stanovených neistôt  $s_{Av_f}$  a  $s_{Bv_f}$  zhodná s fázovou rýchlosťou, znamená to [pozri vzťah (4)], že pre danú frekvenciu (800 kHz) a jej zodpovedajúcu vlnovú dĺžku platí  $dv_f/d\lambda \approx 0$ , čiže na tejto frekvencii sa prípadná disperzia prostredia<sup>2</sup> neprejavuje.

## Inštrukcie pre zostojenie grafov

Do grafu pre výsledky z merania fázovej rýchlosti zakreslite namerané hodnoty napr. krížikmi. (Pozri príklad grafu na obrázku).



<sup>2</sup>Pod disperzným prostredím rozumieme také, v ktorom fázová rýchlosť vlny závisí od frekvencie.

Modelovú rovnicu zapíšte v symbolickom tvare  $\Delta\ell = \lambda m$ . Na vhodné miesto v grafe označte hodnotu smernice  $\lambda$  aj jej smerodajnú odchýlku  $s_{\lambda}$  (aj s jednotkami) získané lineárnou regresiou. Regresným výpočtom určte a do grafu označte aj hodnotu a štvorca koeficientu determinovanosti  $\mathcal{R}_{\text{det}}^2$ . Nameranými bodmi pomocou pravítka preložte priamku v súlade s výsledkami regresie.

V prípade grafu pre meranie grupovej rýchlosti postupujte obdobne s tým, že modelovou rovnicou bude  $\Delta\ell = v_g \Delta t$ .

Jednotky veličín  $\lambda$ ,  $v_g$  a ich odchýlok uvádzajte v *grafoch* konzistentne s jednotkami použitými pre osi grafu. Napr. ak v grafe pre grupovú rýchlosť budete uvádzať čas v  $\mu\text{s}$  a vzdialenosť v mm, tak ako jednotku grupovej rýchlosti (smernice priamky) uvádzanej v grafe použite  $\text{mm}/\mu\text{s}$ .

Niektoré z hodnôt uvedených v *grafoch* je potrebné uviesť aj do výsledkovej časti protokolu (spodné riadky tabuliek). Keďže tieto riadky (spolu s časťou Zhodnotenie) sú už *konečnými prezentáciami* výsledkov, je vhodné, aby ste v nich použili jednotky, na aké sme pri daných veličinách zvyknutí; napr. pre rýchlosť vlnenia tu použite jednotky m/s.

Meno:

Krúžok:

Dátum merania:

Protokol laboratórnej úlohy č. 22  
**Fázová a grupová rýchlosť v kvapalinách**

**Stručný opis metódy merania**

**Vzťahy, ktoré sa používajú pri meraní**

**Prístroje a pomôcky**

**Schéma zapojenia**

**Záznam merania, výpočty a výsledky**

$l_1 = 0 \text{ mm}$										
$i$		1	2	3	4	5	6	7	8	9
$m$	0									
$\Delta l$ (mm)	0									
$s_{A\lambda} =$			$v_f =$				$s_{Av_f} =$			

$l_1 = 0 \text{ mm}$										
$i$		1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\Delta l$ (mm)	0									
$\Delta t$ ( $\mu\text{s}$ )	0									
$v_g =$					$s_{Av_g} =$					

Triviálne usporiadané dvojice (0,0) do programu na spracovanie regresiou nekladajte!

**Prílohy**

- graf závislosti  $\Delta l$  od  $m$  pri meraní fázovej rýchlosti
- graf závislosti  $\Delta l$  od  $\Delta t$  pri meraní grupovej rýchlosti

**Zhodnotenie výsledkov**

**Dátum odovzdania protokolu:**

**Podpis študenta:**

**Hodnotenie a podpis učiteľa:**