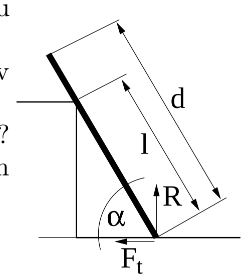
Test 27.10.2009

1. Doska dlhá d s hmotnosťou m sa opiera vo vzdialenosti l o schod (vid. obr). Medzi doskou a podlahou je trenie nenulové, trenie medzi schodom a doskou možno zanedbať.
(1) Pre aký uhol α_{max} je trecia sila medzi doskou a podlahou (F_t), ktorá udržiava dosku v pokoji, maximálna?
(2) Aký musí byť koeficient statického trenia pre kontakt podlahy s doskou v tomto prípade?
(3) Zabezpečí táto hodnota koeficientu trenia stabilitu dosky opretej pod ľubovoľným uhlom?



Re: (1) Trecia sila ktorá zabezpečí stacionárnosť pre uhol α je

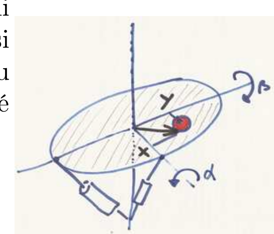
$$F_t = \frac{d}{2l} G \cos(\alpha)\sin(\alpha) = \frac{d}{4l}\sin(2\alpha),$$

a nadobúda maximum pre $\alpha_m = \pi/2$.
(2) Koeficient statického trenia μ musí byť v situácii (1) prinajmenšom

$$\mu = \frac{F_t}{R} = \frac{1}{2}\frac{\sin(2\alpha)}{2l/d - \cos^2(\alpha)}$$

(3) Nie, pretože hoci pri $\mu = \pi/2$ je potrebná maximálna trecia sila, pre klesajúci uhol je normálová sila R menšia čo vyžaduje väčší koeficient trenia na vyvinutie dostatočne veľkej trecej sily čo dosku ustabilizuje. (Alebo matematicky, $d\mu/d\alpha = 0$ pre $\alpha < \pi/2$.)

2. Kruhová doska je naklápaná dvomi piestami tak, že jej naklopenie charakterizujeme dvomi uhlami α a β zodpovedajúcim otočeniu okolo osi x (o α) a následne okolo pootočenej osi y (o β). Aká bude zložka gravitačného zrýchlenia v rovine kruhu, pôsobiaca na guličku nachádzajúcu sa na tomto kruhu v mieste (x, y) vzhľadom na súradnicové osi pevne spojené s kruhom? Pre $\alpha = \beta = 0$ je kruhová doska vo vodorovnej referenčnej polohe.

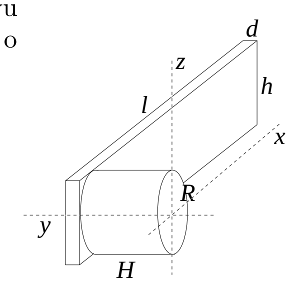


Re: V báze vektorov pevne spojenou s kruhovou doskou nájdeme

$$\begin{aligned}\vec{g} &= \sum_{ij} \vec{f}_j R^{-\beta,2}_{ji} R^{-\alpha,1}_{i3}(-g) = (\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3)\begin{pmatrix} c\beta & 0 & -s\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ s\beta & 0 & c\beta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ s\alpha \\ c\alpha \end{pmatrix}(-g) \\ &= gc\alpha s\beta \vec{f}_1 - gs\alpha \vec{f}_2 - gc\alpha c\beta \vec{f}_3\end{aligned}$$

t.j. v rovine kruhu je zložka gravitačného zrýchlenia $\vec{g}_\parallel = gc\alpha s\beta \vec{f}_1 - gs\alpha \vec{f}_2$.

3. Nájdite polohový vektor ťažiska ramena manipulátora s motorom vzhľadom na sústavu súradníc na obrázku. Rameno môžeme modelovať homogénnou doskou s rozmermi h, d, l o hmotnosti m a motor ako homogénny valec s výškou H, polomerom R a hmotnosťou M.



Re:

$$\vec{r}^* = \frac{\vec{r}^*_1 m + \vec{r}^*_2 M}{m + M} = \Big((MH/2 + m(H + d/2))\vec{j} + m(l/2 - R)\vec{i}\Big)/(m + M)$$