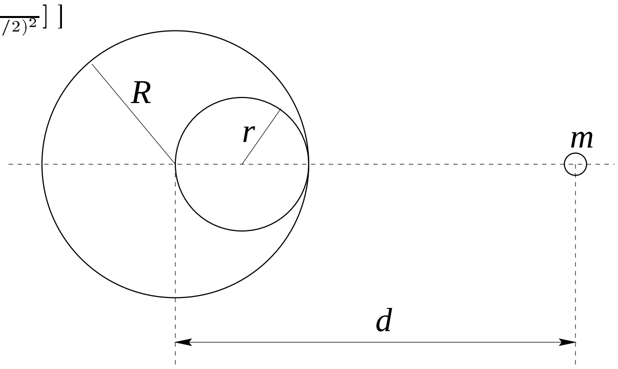
GRAVITAČNÉ POLE

1. Dve medené gule s polomermi $r_1 = 2$ cm, $r_2 = 3$ cm, sa dotýkajú. Aká je gravitačná potenciálna energia tejto sústavy ? ($\rho = 8{,}6.10^3$ kg/m^3)

[$E_P = -G(\frac{4}{3}\pi\rho)^2 \frac{r_1^3 r_2^3}{r_1+r_2}$ = -3,74.10^{-10} J (G je gravitačná konštanta)]

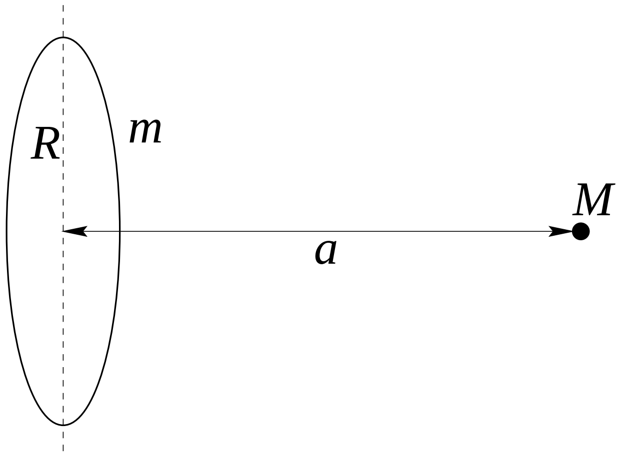
2 V kovovej homogénnej guli s polomerom R je vytvorená dutina s polomerom $r = R/2$ (obr.). Hmotnosť tejto gule bez dutiny je M . Akou veľkou silou pôsobí toto teleso na malú guľôčku hmotnosti m , ktorej stred leží na osi symetrie telesa a je od stredu pôvodnej gule vzdialený o dĺžku d ?

[$F = GmM[\frac{1}{d^2} - \frac{1}{8(d-R/2)^2}]$]



3. Akou veľkou gravitačnou silou pôsobí homogénny drôt hmotnosti m ohnutý do tvaru kružnice s polomerom R na hmotný bod s hmotnosťou M ležiaci na osi kružnice vo vzdialenosti a od jej stredu ?

[$F = G\frac{Mma}{(R^2+a^2)^{3/2}}$]



4. Vypočítajte potenciál a intenzitu gravitačného poľa homogénneho drôtu hmotnosti m ohnutého do tvaru kružnice s polomerom R v bode P na osi kružnice vo vzdialenosti a od jej stredu.

[$V = -G\frac{m}{\sqrt{a^2+R^2}}$, $\mathbf{E} = G\frac{ma}{(a^2+R^2)^{3/2}}\nu$, kde ν je jednotkový vektor kolmý na rovinu drôtu a orientovaný ku drôtu.]

5. Určte veľkosť gravitačného zrýchlenia g ako funkciu vzdialenosti h od zemského povrchu, keď poznáte polomer Zeme R a zrýchlenie g_0 na povrchu Zeme.

[$g = g_0(\frac{R}{R+h})^2$]

6. V akej vzdialenosti od povrchu Zeme má gravitačné zrýchlenie veľkosť 1 m/s^2 , keď polomer Zeme R = 6378 km a na povrchu Zeme g_0 = 9,81 m/s^2 .

[$h = R(\sqrt{\frac{g_0}{g}} - 1)$ = 13598,5 km]

7. Typická neutrónová hviezda má hmotnosť Slnka ($m = 2.10^{30}$ kg) , ale polomer len R = 10 km. Vypočítajte

a) aké je gravitačné zrýchlenie na povrchu hviezdy,

b) akú rýchlosť získa voľne padajúce teleso na dráhe dĺžky s = 1 m .

[a) $g = Gm/R^2$ = 13,34.10^{11} m/s^2, b) $v = \sqrt{2sg}$ = 1,633.10^6 m/s]

8. V akom vzťahu je výška veže H s hĺbkou šachty h , keď na vrchole veže a na dne šachty je doba kmitu toho istého matematického kyvadla rovnaká ? Polomer Zeme $R \gg H$.

[$h = H\frac{R(2R+H)}{(R+H)^2} \simeq 2H$]

9. Nájdite zrýchlenie, ktorým by padali telesá na povrchu Mesiaca ak predpokladáme, že na telesá pôsobí len gravitačné pole Mesiaca a keď vieme, že medzi hmotnosťami a polomermi Mesiaca a Zeme platia vzťahy $M_M \simeq 1/81\ M_Z$, $R_M \simeq 1/4\ R_Z$.

[$g_M \simeq \frac{16}{81} g_0 = 1.938$ ms-2]

10. Nájdite hodnotu rýchlosti v_0 , ktorú treba udeliť v smere zvislom nahor telesu nachádzajúcemu sa na povrchu Zeme, aby sa dostalo do výšky $h = R_Z$. Odpor prostredia neuvažujte, $R_Z = 6370$ km .
[$v_0 = \sqrt{g_0 R_Z} = 7{,}905$ km/s]

11. Akú rýchlosť treba udeliť rakete nachádzajúcej sa na povrchu Zeme, aby sa vymanila z jej gravitačného poľa ? ($R = 6378$ km, $g_0 = 9{,}81$ m/s^2).
[$v = \sqrt{2 g_0 R} = 11{,}2$ km/s]

12. Ak skokan vyskočí na povrchu Zeme do výšky $h_Z = 1{,}2$ m , do akej výšky h_M vyskočí na Mesiaci, ak pri odraze vyvinie rovnaký impulz ako na Zemi ? Hmotnosť a polomer Mesiaca: $M_M = 6{,}7.10^{22}$ kg , $R_M = 1{,}6.10^6$ m .
[$h_M = \frac{g_0}{g_M} h_Z = 6,742m$]

13. Teleso s hmotnosťou m sa nachádza najprv na povrchu Zeme, potom vo výške h nad jej povrchom (hmotnosť Zeme M a jej polomer R sú známe). Určte
a) rozdiel potenciálnej energie ΔU telesa vo výške h a na povrchu Zeme, t.j. potenciálnu energiu vzhľadom na povrch Zeme,
b) ΔU pre $h \ll R$.
[a) $\Delta U = g_0 m R h/$, kde $g_0 = GM/R^2$, b) $\Delta U = m g_0 h$]

14. Vypočítajte, v ktorom mieste na spojnici medzi Zemou a Mesiacom sa intenzita ich spoločného gravitačného poľa rovná nule ! Hmotnosť Mesiaca $M_M = 1/81\ M_Z$, vzdialenosť stredov oboch telies $d \simeq 380\ 000$ km .
[$x = 0{,}9\ d = 342\ 000$ km od stredu Zeme]

15. Telesu s hmotnosťou m , ktoré sa nachádza na povrchu Zeme , udelíme vo vertikálnom smere rýchlosť v_0 . Akú výšku h teleso dosiahne, ak v_0 je menšie než 2. kozmická rýchlosť ? Odpor prostredia neuvažujte.
[$h = v_0^2 R/(2 g_0 R - v_0^2)$]

16. Teleso padá voľným pádom z veľkej výšky $h \gg R$ (R je polomer Zeme). Akou rýchlosťou v_0 by dopadlo na Zem, ak by sa pohybovalo vo vákuu ?
[$v_0 = \sqrt{\frac{2 g_0 h R}{R+h}} \simeq \sqrt{2 g_0 R}$]

17. Určte obvodovú rýchlosť, ktorou Zem obieha okolo Slnka, za predpokladu, že dráha Zeme je kruhová s polomerom $R_d = 1{,}5.10^8$ km, a keď vieme, že hmotnosť Slnka $M_S = 2.10^{30}$ kg.
[$v = 29{,}82$ km/s]

18. Dokážte, že úniková rýchlosť v_2 od Slnka na kružnici po ktorej sa pohybuje Zem je $\sqrt{2}$ krát väčšia než obežná rýchlosť v_1 Zeme okolo Slnka.
[$v_2 = \sqrt{\frac{2GM}{r}} \quad v_1 \sqrt{\frac{GM}{r}}$]

19. Vypočítajte hmotnosť Slnka M_S ak predpokladáme, že Zem obieha po kruhovej dráhe s polomerom $R = 149\ 504\ 200$ km a dobou obehu $T = 365{,}25$ dní. Pomocou známeho polomeru Slnka $R_S = 695\ 300$ km potom vypočítajte tiažové zrýchlenie g_S na jeho povrchu.
[$M_S = 1{,}986.10^{30}$, $g_S = 274$ m/s^2]

20. Vzdialenosť Marsu od Slnka je 1,52-krát väčšia ako vzdialenosť Zeme od Slnka. Na základe tohto údaja určte obežnú dobu Marsu okolo Slnka.
[$T_M = 1{,}874\ T_Z = 684$ dní]

21. Umelá družica obieha okolo Zeme po kruhovej dráhe vo výške 200 km nad zemským povrchom. Určte jej obvodovú rýchlosť v_0 a dobu jedného obehu T . Polomer Zeme $R = 6378$ km.
[$v_0 = \sqrt{g_0 R^2/(R+h)}$ 7,79 km/s, $T = 2\pi R/v_0 \simeq 1{,}43$ h]

22. Určte dostredivé zrýchlenie družice pri jej pohybe po kruhovej dráhe okolo Zeme vo výške $h = 200$ km nad jej povrchom. Polomer Zeme $R = 6378$ km .
[$a_d = g_0[R/(R+h)]^2 = 9{,}22$ m/s^2]

23. V akej vzdialenosti h od povrchu Zeme sa nachádza stacionárna družica, ktorá sa pohybuje po kruhovej dráhe v rovine rovníka ? Polomer Zeme $R = 6378$ km, $g_0 = 9{,}81$ ms^{-2} , uhlová rýchlosť Zeme $\omega = 2\pi$ /deň.
[$h = \sqrt[3]{g_0 R^2/\omega^2} - R \simeq 36\ 000$ km]

24. Ak by stredom Zeme pozdĺž jej priemeru prechádzal tunel, ukážte, že sila pôsobiaca na teleso hmotnosti m , ktoré z povrchu Zeme voľne pustíme do tunela, je priamo úmerná jeho vzdialenosti x od stredu Zeme a smeruje do jej stredu (obr.) Polomer Zeme $R = 6378$ km, $g_0 = 9{,}81\ \mathrm{ms}^{-2}$. Ďalej vypočítajte čas t_1 , za ktorý sa toto teleso dostane do stredu Zeme, čas t_2 , za ktorý prejde celým tunelom, a rýchlosť v_1, ktorú má teleso v strede tunela.

[$f = g_0 m x/R$, $t_1 = \frac{\pi}{2}\sqrt{R/g_0} = 21{,}2$ min., $t_2 = 2t_1 = 42{,}2$ min, $v_1 = \sqrt{R g_0} = 7{,}91$ km/s]