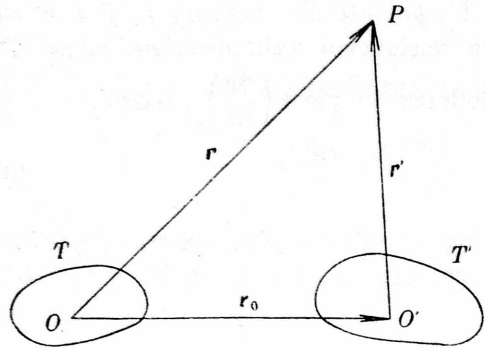
1.11. Zložený pohyb. Ak je daný pohyb bodu P (alebo telesa) vzhľadom na teleso T' a okrem toho pohyb telesa T' vzhľadom na iné teleso T, vtedy pohyb bodu P (alebo telesa) priamo vzhľadom na teleso T nazývame pohybom zloženým z pohybu bodu P (alebo telesa) vzhľadom na teleso T' a pohybu telesa T' vzhľadom na teleso T. Je zrejmé, že takáto *kinematická reťaz* môže byť aj viacčlenná.

Odvodíme vzťahy medzi rýchlosťami a zrýchleniami toho istého bodu P vzhľadom na telesá T a T' vo vzájomnom pohybe. Polohový vektor bodu P vzhľadom na bod O telesa T nech je $\mathbf{r}$ *(obr. 1.16)*, vzhľadom na bod O' telesa T' nech je $\mathbf{r}'$ a polohový vektor bodu O' vzhľadom na bod O nech je $\mathbf{r}_0$, takže $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{r}'$. Rýchlosť bodu P vzhľadom na teleso T je potom



Obr. 1.16

$$\mathbf{v} = \left(\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t}\right)_a = \left(\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}_0}{\mathrm{d}t}\right)_a + \left(\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}'}{\mathrm{d}t}\right)_a = \mathbf{v}_0 + \left(\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}'}{\mathrm{d}t}\right)_a$$

kde $\mathbf{v}_0$ je rýchlosť bodu O' vzhľadom na teleso T. Druhý člen získaného výrazu môžeme upraviť pomocou vzorca (1.10.4), ktorý vyjadruje súvis medzi tzv. absolútnou a relatívnou deriváciou ľubovoľného vektora. Dostávame

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \left(\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}'}{\mathrm{d}t}\right)_r + \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}'$$

t. j.

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}' + \mathbf{v}' \tag{1}$$

keď sme relatívnu deriváciu relatívneho vektora $\mathbf{r}'$ podľa času označili $\mathbf{v}'$. Má zrejme význam rýchlosti pohybu bodu P vzhľadom na teleso T'.

Vzorec (1) môžeme písať aj v tvare

$$\mathbf{v}' = \mathbf{v} - \mathbf{v}_0 - \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}' \tag{2}$$

Utvorením tzv. absolútnej derivácie rýchlosti $\mathbf{v}$ dostaneme tzv. *absolútne zrýchlenie bodu P* čiže jeho zrýchlenie vzhľadom na teleso T:

$$\mathbf{a} = \left(\frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t}\right)_a = \left(\frac{\mathrm{d}\mathbf{v}_0}{\mathrm{d}t}\right)_a + \boldsymbol{\omega}\times\left(\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}'}{\mathrm{d}t}\right)_a + \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}}{\mathrm{d}t}\times\mathbf{r}' + \left(\frac{\mathrm{d}\mathbf{v}'}{\mathrm{d}t}\right)_a$$

Pretože

$$\left(\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}'}{\mathrm{d}t}\right)_a = \mathbf{v}' + \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}'$$

a obdobne

$$\left(\frac{\mathrm{d}\mathbf{v}'}{\mathrm{d}t}\right)_a = \mathbf{a}' + \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{v}'$$

kde $\mathbf{a}' = \left(\frac{\mathrm{d}\mathbf{v}'}{\mathrm{d}t}\right)_r$ je zrýchlenie bodu P vzhľadom na teleso T', je

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_0 + \boldsymbol{\omega}\times(\mathbf{v}' + \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}') + \boldsymbol{\epsilon}\times\mathbf{r}' + \mathbf{a}' + \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{v}'$$

alebo

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_0 + \boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}') + 2(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{v}') + \boldsymbol{\epsilon}\times\mathbf{r}' + \mathbf{a}' \tag{3}$$

takže pre zrýchlenie bodu P vzhľadom na teleso T' dostávame

$$\mathbf{a}' = \mathbf{a} - \mathbf{a}_0 + (\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}')\times\boldsymbol{\omega} - 2(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{v}') - \boldsymbol{\epsilon}\times\mathbf{r}' \tag{4}$$

kde $\mathbf{a}_0$ je zrýchlenie bodu O' telesa T' vzhľadom na teleso T a $\boldsymbol{\epsilon} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}}{\mathrm{d}t}$.

Poznámka: Absolútna a relatívna derivácia vektora uhlovej rýchlosti $\boldsymbol{\omega}$ sú veličiny totožné, lebo podľa vzorca (1.10.4) $\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}}{\mathrm{d}t}\right)_a = \left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}}{\mathrm{d}t}\right)_r + \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\omega} = \left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}}{\mathrm{d}t}\right)_r$.

Vektor $(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}')\times\boldsymbol{\omega}$ vo vzorci (4), o ktorom sa ľahko presvedčíme, že je na okamžitú, bodom O' prechádzajúcu os otáčania telesa T' kolmý a smeruje od tejto osi, volá sa *odstredivé zrýchlenie*. Vektor $-2(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{v}')$, ktorý je na smer vektora uhlovej rýchlosti $\boldsymbol{\omega}$ aj na smer relatívnej rýchlosti $\mathbf{v}'$ bodu P vzhľadom na teleso T' ustavične kolmý, volá sa *Coriolisovo zrýchlenie*. Vektor $-\boldsymbol{\epsilon}\times\mathbf{r}'$ je od nuly rôzny, len ak sa uhlová rýchlosť $\boldsymbol{\omega}$ s časom mení.

Úlohy na cvičenie

1. Bod sa pohybuje priamočiare tak, že prebehnutá dráha závisí od času podľa vzťahu $x = at + bt^2$, kde $a = 5\ \mathrm{ms}^{-1}$, $b = 6\ \mathrm{ms}^{-2}$. Aká je stredná rýchlosť v_s bodu v časovom intervale medzi začiatkom desiatej a koncom dvanástej sekundy a aké sú hodnoty okamžitej rýchlosti v týchto dvoch okamihoch? ($v_s = 131\ \mathrm{ms}^{-1}$, $v_1 = 113\ \mathrm{ms}^{-1}$, $v_2 = 149\ \mathrm{ms}^{-1}$).

2. Dve telesá, ktorých vzájomná vzdialenosť v čase $t = 0$ bola 100 m, pohybujú sa proti sebe: prvé rovnomerne rýchlosťou $v_1 = 3\ \mathrm{ms}^{-1}$, druhé rovnomerne zrýchlene so začiatočnou rýchlosťou $v_0 = 7\ \mathrm{ms}^{-1}$ a so zrýchlením $a = 4\ \mathrm{ms}^{-2}$. Vypočítajte čas a miesto ich stretnutia! ($t = 5$ s, $s_1 = 15$ m).

3. Úsečka dĺžky l sa pohybuje v prvom kvadrante roviny osí X a Y tak, že jej koncové body sú stále na osiach X a Y a jej bod ležiaci na osi Y sa pohybuje konštantnou rýchlosťou v_2 smerom k začiatku. Odvoďte závislosť rýchlosti v_1 druhého koncového bodu úsečky od jeho polohy!

$$\left(v_1 = v_2\sqrt{\frac{l^2}{x^2} - 1}\right)$$

4. Odvoďte absolútnu hodnotu rýchlosti a zrýchlenia pri rovnomernom pohybe bodu po kružnici pri uhlovej rýchlosti ω, ak je polomer kružnice r! ($v = \omega r$, $a = \omega^2 r$).

5. Odvoďte závislosť rýchlosti a zrýchlenia od času pri pohybe bodu daného rovnicami: $x = a \cos \omega t$, $y = b \sin \omega t$, $z = 0$! ($\mathbf{v} = -\mathbf{i} a\omega \sin \omega t + \mathbf{j} b\omega \cos \omega t$, $\mathbf{a} = -\omega^2 \mathbf{r}$).

6. Roztáčané koleso dosiahlo za čas $t = 20$ s frekvenciu otáčania $n = 200$ otočení za minútu. Aké bolo uhlové zrýchlenie za predpokladu, že sa pri roztáčaní nemenilo? Koľkokrát sa koleso za ten čas otočilo? $\left(\frac{\pi}{3}\ \mathrm{s}^{-2},\ n = 33{,}3\right)$.

7. Kruhová doska s polomerom R sa valí po priamke tak, že jej stred sa pohybuje konštantnou rýchlosťou v_0. Odvoďte vyjadrenie absolútnej hodnoty rýchlosti a zrýchlenia v čase t toho bodu jej obvodu, ktorý bol na začiatku počítania času dotykovým bodom!

N á v o d : Uvedomte si, že pohyb dosky je otáčanie okolo okamžitej osi otáčania idúcej dotykovým bodom, $v = 2v_0 \sin\left(\frac{v_0 t}{2R} - n\pi\right)$, kde n je počet celých pootočení, $a = \frac{v_0^2}{R}$.

8. Kruh s polomerom r sa valí po vodorovnej priamke tak, že jeho stred sa pohybuje rýchlosťou v_0. Odvoďte závislosť absolútnej hodnoty rýchlosti od času bodu viazaného na kruh, ktorého vzdialenosť od stredu kruhu je a, ak pohyb začal vtedy, keď tento bod bol vo svojej najnižšej polohe! Aká je najväčšia a najmenšia hodnota tejto rýchlosti?

N á v o d : Použite vzorec $\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$!

$$\left[v = v_0 \sqrt{1 - 2\frac{a}{r}\cos\omega t + \frac{a^2}{r^2}},\ v_1 = v_0\left(1 + \frac{a}{r}\right),\ v_2 = v_0\left(1 - \frac{a}{r}\right)\right]$$

2. DYNAMIKA HMOTNÉHO BODU

Dynamika (podľa gréckeho slova *dynamos* = sila) je časť mechaniky, v ktorej sa — na rozdiel od kinematiky — pohyb telies nielen opisuje, ale v ktorej sa skúmajú aj príčiny vzniku pohybu a zmien pohybového stavu telies. Podmienky, ktoré musia byť splnené, aby sa pokoj telies zachoval, sa skúmajú v *statike*. Pokoj však je zvláštny prípad pohybu, pohyb s nulovou rýchlosťou, takže statika je len časť dynamiky, aj keď z dôvodov praktičnosti veľmi dôležitá.

Základné zákony dynamiky sú tri Newtonove zákony: *zákon zotrvačnosti*, *zákon sily* a *zákon akcie a reakcie*. Skôr než pristúpime k ich formulácii, zavedieme si pojem hmotného bodu.

Fyzikálnym hmotným bodom budeme rozumieť teleso, ktorého rozmery za daných objektívnych okolností a vzhľadom na obsah otázky, na ktorú bude treba nájsť odpoveď, budú sa môcť nechať bez povšimnutia.

Ak napríklad tuhé teleso bude upevnené tak, že bude môcť konať len translačný pohyb, tento jeho pohyb bude úplne určený pohybom ktoréhokoľvek