

Úloha 1. Aký tvar má pohybová čiara bodu, ktorý sa pohybuje podľa rovníc $x = a \cos \omega t$, $y = b \sin \omega t$, $z = 0$?

Riešenie: Dané pohybové rovnice môžeme prepísať na tvar

$$\frac{x}{a} = \cos \omega t, \quad \frac{y}{b} = \sin \omega t$$

Umocnením týchto rovníc dvoma a sčítaním dostávame hľadanú rovnicu pohybovej čiary

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

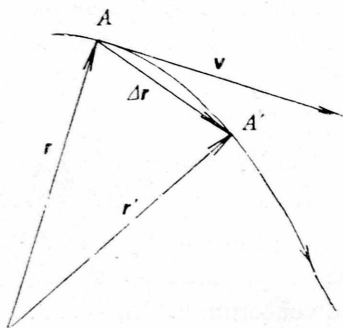
Bod sa teda pohybuje po elipse s polosami a a b , v rovine XY , a to v zmysle stotožňovania kladného smeru osi X s kladným smerom osi Y na kratšej ceste.

1.2. Rýchlosť a zrýchlenie pri pohybe bodu. Majme na mysli pohyb bodu vzhľadom na nejaké teleso, pri ktorom pohybujúci sa bod v čase t bol v polohe A a v čase $t + \Delta t$ v polohe A' . Príslušné polohové vektory nech sú $\mathbf{r}$ a $\mathbf{r}'$ (obr. 1.5),

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} + \Delta \mathbf{r}. \text{ Hraničná hodnota podielu } \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t}$$

pre Δt blížiac sa k nule, derivácia polohového vektora podľa času, volá sa okamžitá rýchlosť $\mathbf{v}$ pohybujúceho sa bodu v jeho polohe A a v čase t . *Okamžitá rýchlosť* pri pohybe bodu je teda

$$\mathbf{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \dot{\mathbf{r}} \quad (1)$$



Obr. 1.5

Deriváciu podľa času budeme aj ďalej, podľa I. Newtona, označovať niekedy bodkou nad príslušným písmenom.

Rýchlosť $\mathbf{v}$ pohybujúceho sa bodu je teda vektor, ktorý je rovnobežný s dotyčnicou k pohybovej čiare v príslušnom bode a je orientovaný na stranu pohybu.

Nech s je dráha prebehnutá pohybujúcim sa bodom od nejakého ľubovoľne zvoleného časového okamihu. Podiel $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ sa volá *strednou rýchlosťou* pohybujúceho sa bodu v časovom intervale Δt . Je zrejmé, že

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{|\Delta \mathbf{r}|}{\Delta t} = |\mathbf{v}| = v$$

Poznámka: Absolútne hodnoty vektorov budeme aj v ďalšom texte označovať obyčajne tými istými písmenami, avšak vytlačenými kurzívou.

Absolútna hodnota okamžitej rýchlosti, zavedenej ako vektor, má teda význam hraničnej hodnoty strednej rýchlosti, ak príslušný časový interval zmenšujeme k nule. Rýchlosť sama je však vektor, ktorý sa okrem svojej absolútnej hodnoty vyznačuje aj svojím smerom.

Rozmer rýchlosti v sústave SI je ms^{-1} (MS^{-1}) a jednotkou je rýchlosť, pri ktorej sa za jednu sekundu prebehne dráha 1 meter.

Pohyb bodu sa nazýva *priamočiary*, ak sa pri ňom nemení smer rýchlosti, a *rovnomerný*, ak sa nemení absolútna hodnota rýchlosti. Len smer rýchlosti sa mení napríklad pri rovnomernom pohybe po kružnici. Vo všeobecnosti sa však mení absolútna hodnota aj smer rýchlosti.

Na meranie rýchlosti sa používajú prístroje, ktoré sa nazývajú *tachymetre*. Tachymeter stopkový sú stopky, ktoré okrem stupnice udávajúcej čas majú ešte jednu stupnicu. Táto tzv. *tachymetrická stupnica*, ktorá sa obyčajne zhotovuje v podobe špirály s dvoma alebo troma závitmi, udáva priamo strednú rýchlosť, ak tachymeter bol pustený a zastavený na začiatku a na konci dráhy vyznačenej na tachymetri (100 m alebo 1 km). Pri tachymetri pre trať 1 km polohu sekundovej ručičky pre celistvé násobky rýchlosti 1 km/h dostaneme, ak do vzorca $t = s/v = 1 \text{ km}/v$ za v dosadíme postupne 1 km/h, 2 km/h atď.

Napríklad pre rýchlosť 40 km/h dostávame, že $t_{40} = \frac{1 \text{ km}}{40 \text{ kmh}^{-1}} = \frac{1 \text{ km} \cdot 3\,600 \text{ s}}{40 \text{ km}} = 90 \text{ s}$.

Okamžitú rýchlosť vozidiel udávajú tachymetre, pri ktorých sa postupná rýchlosť vozidla pomocou prevodov viazaných na koleso vozidla mení na uhlovú rýchlosť rotujúcej súčiastky prístroja. Využíva sa pri nich odstredivá sila, častejšie však Foucoltove vírivé elektrické prúdy, ktoré sú budené rotujúcim magnetom. Vo vnútri ľahkej kovovej krabice, uloženej na osi a pomocou pružnej oceleovej špirály vracanej do nulovej polohy, rotujúci magnet vytáča krabicu z jej nulovej polohy silou úmernou uhlovej rýchlosti otáčania magnetu.

Úloha 1. Voz elektrickej železnice sa pohyboval rovnomerne a prebehol dráhu 200 m za $\frac{2}{3}$ min. Vypočítajte rýchlosť v ms^{-1} , kmh^{-1} a cms^{-1} !

Riešenie:

$$v = \frac{200 \text{ m}}{\frac{2}{3} \text{ min}} = \frac{200 \text{ m}}{40 \text{ s}} = 5 \text{ ms}^{-1}$$

ale aj

$$v = 5 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 5 \cdot \frac{0,001 \text{ km}}{\frac{1}{3\,600} \text{ h}} = 18 \text{ kmh}^{-1}$$

alebo

$$v = 5 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 5 \cdot \frac{100 \text{ cm}}{\text{s}} = 500 \text{ cms}^{-1}$$

Podľa svojej definície rýchlosť (vektor rýchlosti) pohybujúceho sa bodu je derivácia jeho polohového, s časom sa meniaceho vektora podľa času. Ďalším derivovaním rýchlosti, opäť podľa času, dostávame novú vektorovú veličinu, ktorá sa nazýva *zrýchlením*. Zrýchlenie pri pohybe bodu je teda

$$\mathbf{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \dot{\mathbf{v}} = \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = \ddot{\mathbf{r}} \quad (2)$$

Rýchlosť pohybujúceho sa bodu je prvá derivácia polohového vektora podľa času a zrýchlenie je prvá derivácia rýchlosti alebo druhá derivácia polohového vektora podľa času.

Rozmer zrýchlenia v sústave SI je ms^{-2} (MS^{-2}) a jednotkou je zrýchlenie, pri ktorom sa rýchlosť za jednu sekundu zmení o 1 ms^{-1} . Zrýchlenie v sústave SI je jednotkové, keď sa napr. bez zmeny smeru zmení rýchlosť 50 ms^{-1} za 1 sekundu na rýchlosť 51 ms^{-1} .

Keď je pohyb bodu určený tak, že sú dané pravouhlé súradnice pohybujúceho sa bodu ako funkcie času, rýchlosť a zrýchlenie nájdeme takto

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$$

a preto

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \dot{x}\mathbf{i} + \dot{y}\mathbf{j} + \dot{z}\mathbf{k} = v_x\mathbf{i} + v_y\mathbf{j} + v_z\mathbf{k}$$

kde $v_x = \dot{x}$, $v_y = \dot{y}$, $v_z = \dot{z}$ sú súradnice vektora rýchlosti. Absolútna hodnota rýchlosti je

$$v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}$$

Pre zrýchlenie vychádza podobne:

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \ddot{x}\mathbf{i} + \ddot{y}\mathbf{j} + \ddot{z}\mathbf{k} = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k}$$

$$a = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2}$$

Úloha 2. Odvodte vyjadrenie pohybu, pri ktorom v čase $t = 0$ bolo $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0$ a pohyb je rovnomerný a priamočiary.

Riešenie: Pri tomto pohybe $\mathbf{v} = \text{const.}$ Z rovnice $\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{v}$, čiže z rovnice $d\mathbf{r} = \mathbf{v} dt$ integráciou dostávame

$$\int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} d\mathbf{r} = \int_0^t \mathbf{v} dt = \mathbf{v} \int_0^t dt$$

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}t$$

Úloha 3. Odvodte vyjadrenie pohybu s konštantným zrýchlením, pri ktorom v čase $t = 0$ bolo $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0$ a $\mathbf{v} = \mathbf{v}_0$.

Riešenie: Z rovnice $\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{a}$, čiže z rovnice $d\mathbf{v} = \mathbf{a} dt$, v ktorej vektor $\mathbf{a}$ je konštantný, integráciou dostávame

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{a}t$$

Túto rovnicu môžeme napísať v tvare

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{a}t$$

alebo v tvare

$$d\mathbf{r} = (\mathbf{v}_0 + \mathbf{a}t) dt$$

z čoho ďalšou integráciou dostávame

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}_0 t + \frac{1}{2} \mathbf{a} t^2$$

Úloha 4. Odvodte závislosť rýchlosti a zrýchlenia od času pri pohybe bodu daného rovnicami: $x = a \cos \omega t$, $y = b \sin \omega t$, $z = 0$.

Riešenie: Podľa výsledku riešenia úlohy (1.1.1) bod sa pohybuje po elipse s polosami a a b . Polohový vektor takto sa pohybujúceho bodu je

$$\mathbf{r} = ia \cos \omega t + jb \sin \omega t$$

Rýchlosť je teda

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = -ia\omega \sin \omega t + jb\omega \cos \omega t$$

a jej absolútna hodnota

$$v = \omega \sqrt{a^2 \sin^2 \omega t + b^2 \cos^2 \omega t}$$

Pre zrýchlenie vychádza

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -ia\omega^2 \cos \omega t - jb\omega^2 \sin \omega t = -\omega^2 \mathbf{r}$$

Zrýchlenie smeruje teda stále do začiatku súradnicového systému a jeho absolútna hodnota $a = \omega^2 r$ je úmerná okamžitej vzdialenosti pohybujúceho sa bodu od začiatku.

Nech je daná čiara K a na nej bod O (začiatok). Polohu ľubovoľného bodu A na čiare K potom jednoznačne určuje jeho vzdialenosť u od bodu O , meraná pozdĺž čiar a počítaná kladne vo zvolenom zmysle a záporne v zmysle opačnom. Preto pohyb bodu na vopred danej alebo podľa podmienok pohybu vopred bezpečne známej čiare úplne určuje jediná skalárna funkcia času $u = f(t)$, a pri riešení takýchto pohybov bodu stačí pod rýchlosťou a zrýchlením rozumieť skalárne veličiny $v = \frac{du}{dt}$ a $a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2u}{dt^2}$. Treba však pamätať, že takto zavedená rýchlosť $v = \frac{du}{dt}$ nie je totožná s absolútnou hodnotou

rýchlosti, ale že $v = \frac{du}{dt} = \pm |\mathbf{v}|$, podľa toho, či pohyb prebieha v zmysle

zvolenej orientácie pohybovej čiary alebo obrátene. O zrýchlení $a = \frac{d^2u}{dt^2}$

sa neskoršie (čl. 1.5) presvedčíme, že sa rovná veľkosti tangenciálnej zložky zrýchlenia s nezmeneným alebo so zmeneným znamienkom zas podľa toho, či pohyb prebieha v zmysle orientácie pohybovej čiary alebo obrátene.

Pohyb bodu po danej čiare sa nazýva rovnomerne premenným, ak je pri

ňom $a = \frac{d^2u}{dt^2} = \text{const}$. Pohyb rovnomerne premenný sa nazýva *rovnomerne*

zrýchleným, ak [sa [zrýchlenie $a = \frac{d^2u}{dt^2}$ zhoduje v znamienku s rýchlosťou

$v = \frac{du}{dt}$ a *rovnomerne spomaleným* v opačnom prípade.

1.3. Uhlová rýchlosť a uhlové zrýchlenie. Pohybujúci sa bod vytvára v priestore svoju *pohybovú čiaru (trajektóriu)*, jeho sprievodič vo všeobecnosti kuželovú plochu. Nech φ je uhol, ktorý vytvorí sprievodič na tejto ploche za čas t . Derivácia

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} \quad (1)$$

sa nazýva *uhlová rýchlosť stáčania sa sprievodiča*. Vektor $\boldsymbol{\omega}$ s tou istou absolútnou hodnotou, ktorý je na rovinu určenú polohovým vektorom $\mathbf{r}$ a vektorom rýchlosti $\mathbf{v}$ kolmý a orientovaný tak, že sústava vektorov $\mathbf{r}$, $\mathbf{v}$ a $\boldsymbol{\omega}$ je pravotočivá, nazýva sa *vektor uhlovej rýchlosti stáčania sa sprievodiča* (obr. 1.6). Jeho derivácia podľa času

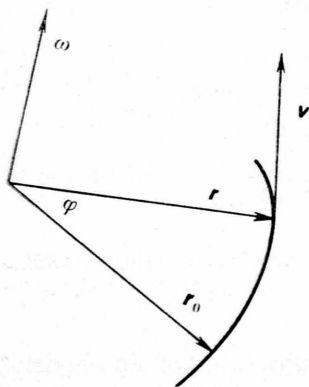
$$\varepsilon = \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \quad (2)$$

nazýva sa vektor uhlového zrýchlenia stáčania sa sprievodiča.

Absolútna hodnota vektorovej veličiny definovanej integrálom

$$\alpha = \int_0^t \omega dt \quad (3)$$

sa rovná vyššie zavedenému uhlu φ , avšak len vtedy, keď sa sprievodič pohybujuceho sa bodu stáča stále v tej istej rovine a v tom istom zmysle. Z definície vektora $\boldsymbol{\alpha}$ však vyplýva, že vždy platí:



Obr. 1.6