1.4. Rozklad rýchlosti a zrýchlenia na zložku radiálnu a priečnu. Predstavme si, že vo zvláštnom prípade bod sa pohybuje tak, že sa mení len smer jeho sprievodiča, avšak jeho absolútna hodnota r ostáva konštantná. Ak sa za veľmi krátky čas $\mathrm{d}t$ sprievodič pohybujúceho sa bodu pootočil o uhol $\mathrm{d}\alpha$, bod vykonal dráhu $\mathrm{d}s = r\,\mathrm{d}\alpha$ a absolútna hodnota rýchlosti je $v = \dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = r\,\dfrac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t}$.

Nech je ďalej $\boldsymbol{\nu}$ jednotkový vektor kolmý na rovinu vektorov $\mathbf{r}$ a $\mathbf{r}' = \mathbf{r} + \mathrm{d}\mathbf{r}$ a s vektorom $\mathrm{d}\boldsymbol{\alpha}$, zavedeným v predchádzajúcom článku, súhlasne rovnobežný. Okrem toho nech je $\boldsymbol{\rho}$ jednotkový vektor v smere sprievodiča a $\boldsymbol{\tau}$ jednotkový vektor v smere okamžitej rýchlosti. Vtedy $\mathbf{r} = r\boldsymbol{\rho}$, $\mathbf{v} = v\boldsymbol{\tau}$, $\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\nu} \times \boldsymbol{\rho}$ a $\dfrac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{v} = v\boldsymbol{\tau} = v(\boldsymbol{\nu} \times \boldsymbol{\rho}) = r\,\dfrac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{\nu}\times\boldsymbol{\rho}) = \dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{\alpha}}{\mathrm{d}t} \times \mathbf{r} = \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}$.

Vydelením rovnice

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t} = \omega\times\mathbf{r} \tag{1}$$

v našom prípade konštantou absolútnou hodnotou r sprievodiča $\mathbf{r}$ dostávame vyjadrenie derivácie podľa času jednotkového vektora v jeho smere:

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\rho}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\rho} \tag{2}$$

Keď sa bod pohybuje náhodilým spôsobom, takže sa prípadne mení aj absolútna hodnota jeho sprievodiča, predošlú úvahu môžeme použiť pre bod, v ktorom sprievodič pretína povrch gule so stredom vo zvolenom začiatku. Vzorec (2) má teda všeobecnú platnosť.

Po týchto prípravných úvahách zaoberajme sa teraz už ľubovoľným pohybom bodu. Jeho polohový vektor môžeme vždy napísať v tvare skalárneho násobku jednotkového vektora v jeho smere jeho absolútnou hodnotou r:

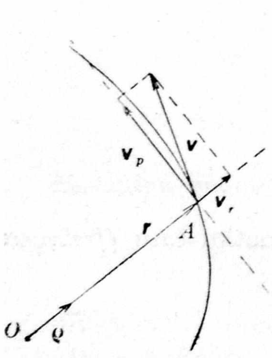
$$\mathbf{r} = r\boldsymbol{\rho}$$

Derivovaním tohto vyjadrenia sprievodiča dostávame vektor rýchlosti pohybu v tvare

$$\mathbf{v} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}(r\boldsymbol{\rho})}{\mathrm{d}t} = r\,\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\rho}}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\,\boldsymbol{\rho}$$

alebo, podľa vzorca (2),

$$\mathbf{v} = r(\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}) + \dot{r}\boldsymbol{\rho} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} + \dot{r}\boldsymbol{\rho} \tag{3}$$



Obr. 1.7

Týmto postupom dostali sme vyjadrenie vektora rýchlosti v podobe súčtu dvoch jeho zložiek. Druhá zložka $\mathbf{v}_r = \dot{r}\boldsymbol{\rho}$, keďže je rovnobežná so sprievodičom (radius vektorom), volá sa *radiálnou* alebo *pozdĺžnou* zložkou. Prvá zložka, $\mathbf{v}_p = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$, na sprievodič kolmá, nazýva sa *priečnou* zložkou *(obr. 1.7)*.

Absolútna hodnota rýchlosti je

$$v = \sqrt{v_r^2 + v_p^2} = \sqrt{\dot{r}^2 + \omega^2 r^2}$$

Ďalším derivovaním vyjadrenia rýchlosti daného vzorcom (3) podľa času dostávame vektor zrýchlenia v tvare

$$\begin{aligned}\mathbf{a} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} + \dot{r}\boldsymbol{\rho}) &= \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} + \boldsymbol{\epsilon} \times \mathbf{r} + \dot{r}\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho} + \ddot{r}\boldsymbol{\rho} = \\ &= \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} + \dot{r}\boldsymbol{\rho}) + \boldsymbol{\epsilon} \times \mathbf{r} + \dot{r}\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho} + \ddot{r}\boldsymbol{\rho} = \\ &= -\omega^2 r\boldsymbol{\rho} + \dot{r}\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho} + r\boldsymbol{\epsilon} \times \boldsymbol{\rho} + \dot{r}\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho} + \ddot{r}\boldsymbol{\rho}\end{aligned}$$

teda

$$\mathbf{a} = (\ddot{r} - \omega^2 r)\,\boldsymbol{\rho} + (r\boldsymbol{\epsilon} + 2\dot{r}\boldsymbol{\omega}) \times \boldsymbol{\rho} \tag{4}$$

Pri upravovaní výrazu pre zrýchlenie sme použili z vektorovej algebry známy vzorec pre dvojnásobný vektorový súčin troch vektorov, $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\,\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\,\mathbf{c}$, ako aj to, že v našom prípade vektory $\boldsymbol{\omega}$ a $\mathbf{r}$ sú na seba kolmé.

Vzorec (4) vyjadruje vektor zrýchlenia pri pohybe bodu tiež v tvare súčtu dvoch jeho zložiek, zložky rovnobežnej so sprievodičom *(radiálne zrýchlenie)*, $\mathbf{a}_r = (\ddot{r} - \omega^2 r)\,\boldsymbol{\rho}$, a zložky, ktorá je na sprievodič kolmá *(priečne zrýchlenie)*, $\mathbf{a}_p = (r\boldsymbol{\epsilon} + 2\dot{r}\boldsymbol{\omega}) \times \boldsymbol{\rho}$.

1.5. Tangenciálne a dostredivé zrýchlenie. Vektor rýchlosti $\mathbf{v}$, prvá derivácia sprievodiča pohybujúceho sa bodu podľa času, je rovnobežný s dotyčnicou k čiare pohybu. Nech je $\boldsymbol{\tau}$ jednotkový vektor s dotyčnicou rovnobežný a orientovaný na stranu pohybu. Vektor $\mathbf{v}$ je potom $\mathbf{v} = v\boldsymbol{\tau}$, kde v je absolútna hodnota rýchlosti. Derivovaním tohto vyjadrenia rýchlosti podľa času dostaneme rozklad zrýchlenia na iné dve význačné zložky

$$\mathbf{a} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}(v\boldsymbol{\tau})}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{\tau} + v\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\tau}}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\,\boldsymbol{\tau} + v^2\,\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\tau}}{\mathrm{d}s} \tag{1}$$

kde s značí dĺžku dráhy prebehnutej pohybujúcim sa bodom, meranú od ľubovoľného bodu na čiare pohybu.

Vektor $\mathbf{k}^* = \dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{\tau}}{\mathrm{d}s}$, ktorého absolútna hodnota je zrejme tým väčšia, čím rýchlejšie sa mení smer dotyčnice pri postupe pozdĺž danej čiary, volá sa *vektor*