

rýchlosť ω otáčania sa tuhého telesa okolo jeho osi. Uhlová rýchlosť ω otáčania sa tuhého telesa okolo osi je teda vektor s osou otáčania rovnobežný a orientovaný na tú stranu, z ktorej sa otáčanie javí v zmysle proti pohybu hodinových ručičiek.

Nech je $\mathbf{r}$ polohový vektor ľubovoľne zvoleného bodu P okolo osi otáčajúceho sa tuhého telesa a jeho začiatok nech sa nachádza kdekoľvek na osi otáčania (obr. 1.11). Polohový vektor tohože bodu P vzhľadom na stred kružnice jeho pohybu nech je $\mathbf{a}$. Podľa vzorca (1.4.1), v ktorom za vektor $\mathbf{r}$ v zmysle tohto vzorca treba písať vektor $\mathbf{a}$, rýchlosť bodu P je:

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{a} = \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{r} - \mathbf{o}) = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \quad (1)$$

lebo vektory $\boldsymbol{\omega}$ a $\mathbf{o}$ sú rovnobežné.

Pre zrýchlenie vychádza:

$$\begin{aligned} \mathbf{z} &= \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) + \boldsymbol{\epsilon} \times \mathbf{r} = \\ &= \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{a}) + \boldsymbol{\epsilon} \times \mathbf{a} = -\omega^2 \mathbf{a} + \boldsymbol{\epsilon} \times \mathbf{a} \end{aligned} \quad (2)$$

1.8. Pohyb tuhého telesa upevneného v jednom bode. Ako sme sa presvedčili v čl. 1.6, poloha tuhého telesa v jednom bode upevneného je úplne určená polohami dvoch jeho ďalších bodov, ktoré spolu s nehybným bodom telesa neležia všetky na jednej priamke. Polohu takto upevneného telesa možno však určiť — a to výhodnejšie — aj tak, že nehybný bod telesa O urobíme spoločným začiatkom dvoch pravouhlých a napríklad pravotočivých súradnicových systémov S a S' , z ktorých systém S' je viazaný na teleso, systém S na jeho okolie, a určíme vzájomnú polohu týchto súradnicových systémov pomocou Eulerových uhlov φ , ψ a ϑ . Ich význam je znázornený na obr. 1.12. Pohyb telesa v jednom bode upevneného úplne opisujú funkcie vyjadrujúce závislosti Eulerových uhlov od času.

Dokážme, že ľubovoľný pohyb telesa v jednom bode upevneného je v každom okamžiku otáčanie sa telesa okolo istej priamky, okamžitej osi otáčania, ktorá prechádza nehybným bodom telesa. Dôkaz vykonáme tak, že výraz vyjadrujúci rýchlosť ľubovoľne zvoleného bodu telesa upravíme na tvar $\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$, v ktorom vektor $\boldsymbol{\omega}$ je od voľby bodu tuhého telesa nezávislý. O výraze $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$ vieme totiž už z obsahu predchádzajúceho článku, že vyjadruje otáčanie sa tuhého telesa okolo osi uhlovou rýchlosťou ω .

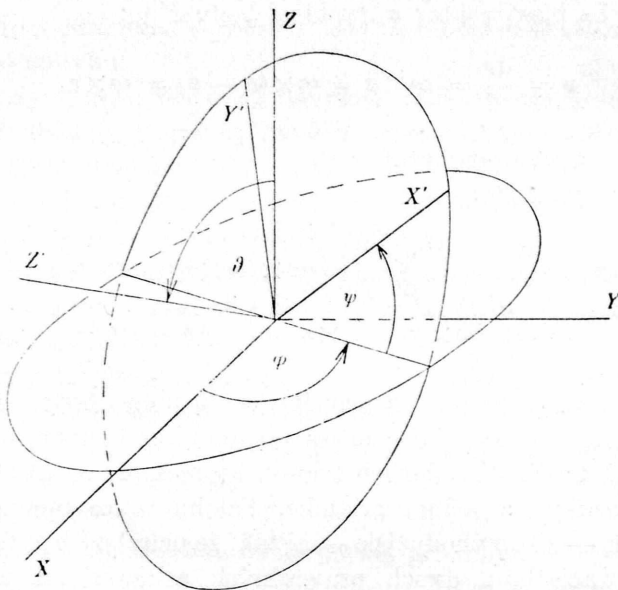
Polohový vektor $\mathbf{r}$ zvoleného bodu P nášho telesa môžeme v systéme S' vyjadriť takto:

$$\mathbf{r} = x'i' + y'j' + z'k' \quad (1)$$

Derivovaním tohto výrazu podľa času (súradnice x' , y' a z' , keďže sa vzťahujú na systém viazaný na teleso, sú od času nezávislé) dostávame pre rýchlosť bodu P vyjadrenie

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = x' \frac{d\mathbf{i}'}{dt} + y' \frac{d\mathbf{j}'}{dt} + z' \frac{d\mathbf{k}'}{dt} \quad (2)$$

ktoré budeme ďalej upravovať.



Obr. 1.12

Pretože derivácie jednotkových vektorov sú vektory na derivované vektory kolmé, môžeme ich vyjadriť v tvare vektorových súčinov derivovaných vektorov s inými tromi vhodne volenými vektormi

$$\frac{d\mathbf{i}'}{dt} = \boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{i}', \quad \frac{d\mathbf{j}'}{dt} = \boldsymbol{\omega}_2 \times \mathbf{j}', \quad \frac{d\mathbf{k}'}{dt} = \boldsymbol{\omega}_3 \times \mathbf{k}' \quad (3)$$

Vektory $\boldsymbol{\omega}_1$, $\boldsymbol{\omega}_2$ a $\boldsymbol{\omega}_3$ môžeme vyjadriť pomocou ich súradníc takto

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\omega}_1 &= p'_1 \mathbf{i}' + q'_1 \mathbf{j}' + r'_1 \mathbf{k}' \\ \boldsymbol{\omega}_2 &= p'_2 \mathbf{i}' + q'_2 \mathbf{j}' + r'_2 \mathbf{k}' \\ \boldsymbol{\omega}_3 &= p'_3 \mathbf{i}' + q'_3 \mathbf{j}' + r'_3 \mathbf{k}' \end{aligned}$$

avšak

$$\boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{i}' = (p'_1 \mathbf{i}' + q'_1 \mathbf{j}' + r'_1 \mathbf{k}') \times \mathbf{i}' = (q'_1 \mathbf{j}' + r'_1 \mathbf{k}') \times \mathbf{i}'$$

takže na voľbe súradnice p'_1 nezáleží. Z podobnej príčiny sú ľubovoľne voliteľné aj súradnice q'_2 a r'_3 . Vektory $\mathbf{j}'$ a $\mathbf{k}'$ sú na seba kolmé, takže splňujú rovnicu $\mathbf{j}' \cdot \mathbf{k}' = 0$. Jej deriváciou podľa času dostávame rovnicu

$$\mathbf{j}' \cdot \frac{d\mathbf{k}'}{dt} = - \frac{d\mathbf{j}'}{dt} \cdot \mathbf{k}'$$

Derivácie v tejto rovnici vyjadríme pomocou vektorov $\boldsymbol{\omega}_3$ a $\boldsymbol{\omega}_2$. Tým dostávame postupne rovnice

$$\begin{aligned} \mathbf{j}' \cdot (\boldsymbol{\omega}_3 \times \mathbf{k}') &= - (\boldsymbol{\omega}_2 \times \mathbf{j}') \cdot \mathbf{k}' \\ - (\mathbf{j}' \times \mathbf{k}') \cdot \boldsymbol{\omega}_3 &= - (\mathbf{j}' \times \mathbf{k}') \cdot \boldsymbol{\omega}_2 \\ \mathbf{i}' \cdot \boldsymbol{\omega}_3 &= \mathbf{i}' \cdot \boldsymbol{\omega}_2 \\ p'_3 &= p'_2 \end{aligned}$$

keď sme použili aj počtové pravidlá platné pre zmiešaný súčin troch vektorov.

Pretože súradnica p'_1 je ľubovoľne voliteľná, môžeme písať: $p'_1 = p'_2 = p'_3 = p'$. Podobne by sme dokázali, že môže byť $q'_1 = q'_2 = q'_3 = q'$ aj $r'_1 = r'_2 = r'_3 = r'$. Vektory $\boldsymbol{\omega}_1$, $\boldsymbol{\omega}_2$ a $\boldsymbol{\omega}_3$ vo vzorcoch (3) môžeme teda voliť tak, že $\boldsymbol{\omega}_1 = \boldsymbol{\omega}_2 = \boldsymbol{\omega}_3 = \boldsymbol{\omega}$.

Rýchlosť bodu P , podľa vzorca (2), je teda aj

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= x'(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{i}') + y'(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{j}') + z'(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{k}') = \\ &= \boldsymbol{\omega} \times (x'\mathbf{i}' + y'\mathbf{j}' + z'\mathbf{k}') = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \end{aligned}$$

takže dôkaz je vykonaný.

Pri ľubovoľnom pohybe tuhého telesa upevneného v jednom bode priamky telesa, ktoré sa postupne stávajú okamžitými osami otáčania, tvoria všeobecný *polódiový kužeľ*, súhrn polôh okamžitých osí otáčania v okolitom priestore tvorí všeobecný *kužeľ herpolódiový*. Pohyb telesa prebieha tak, že sa pri ňom polódiový kužeľ valí (bez šmykania) po kuželi herpolódiovom.

1.9. Pohyb úplne voľného tuhého telesa. Ako už vieme, poloha tuhého telesa úplne voľného je určená šiestimi vhodne zvolenými súradnicami troch jeho bodov, ktoré neležia na tej istej priamke. Môžeme ju však zrejme určiť pomocou troch súradníc jeho ľubovoľne zvoleného bodu a trocha Eulerovými uhlami.

Nech $\mathbf{r}_0$ je polohový vektor ľubovoľne zvoleného bodu O' tuhého telesa úplne voľného vzhľadom na nehybný bod O jeho okolia. Polohový vektor