

takže na voľbe súradnice p'_1 nezáleží. Z podobnej príčiny sú ľubovoľne voliteľné aj súradnice q'_2 a r'_3 . Vektory $\mathbf{j}'$ a $\mathbf{k}'$ sú na seba kolmé, takže splňujú rovnicu $\mathbf{j}' \cdot \mathbf{k}' = 0$. Jej deriváciou podľa času dostávame rovnicu

$$\mathbf{j}' \cdot \frac{d\mathbf{k}'}{dt} = - \frac{d\mathbf{j}'}{dt} \cdot \mathbf{k}'$$

Derivácie v tejto rovnici vyjadríme pomocou vektorov $\boldsymbol{\omega}_3$ a $\boldsymbol{\omega}_2$. Tým dostávame postupne rovnice

$$\begin{aligned} \mathbf{j}' \cdot (\boldsymbol{\omega}_3 \times \mathbf{k}') &= - (\boldsymbol{\omega}_2 \times \mathbf{j}') \cdot \mathbf{k}' \\ - (\mathbf{j}' \times \mathbf{k}') \cdot \boldsymbol{\omega}_3 &= - (\mathbf{j}' \times \mathbf{k}') \cdot \boldsymbol{\omega}_2 \\ \mathbf{i}' \cdot \boldsymbol{\omega}_3 &= \mathbf{i}' \cdot \boldsymbol{\omega}_2 \\ p'_3 &= p'_2 \end{aligned}$$

keď sme použili aj počtové pravidlá platné pre zmiešaný súčin troch vektorov.

Pretože súradnica p'_1 je ľubovoľne voliteľná, môžeme písať: $p'_1 = p'_2 = p'_3 = p'$. Podobne by sme dokázali, že môže byť $q'_1 = q'_2 = q'_3 = q'$ aj $r'_1 = r'_2 = r'_3 = r'$. Vektory $\boldsymbol{\omega}_1$, $\boldsymbol{\omega}_2$ a $\boldsymbol{\omega}_3$ vo vzorcoch (3) môžeme teda voliť tak, že $\boldsymbol{\omega}_1 = \boldsymbol{\omega}_2 = \boldsymbol{\omega}_3 = \boldsymbol{\omega}$.

Rýchlosť bodu P , podľa vzorca (2), je teda aj

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= x'(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{i}') + y'(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{j}') + z'(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{k}') = \\ &= \boldsymbol{\omega} \times (x'\mathbf{i}' + y'\mathbf{j}' + z'\mathbf{k}') = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \end{aligned}$$

takže dôkaz je vykonaný.

Pri ľubovoľnom pohybe tuhého telesa upevneného v jednom bode priamky telesa, ktoré sa postupne stávajú okamžitými osami otáčania, tvoria všeobecný *polódiový kužeľ*, súhrn polôh okamžitých osí otáčania v okolitom priestore tvorí všeobecný *kužeľ herpolódiový*. Pohyb telesa prebieha tak, že sa pri ňom polódiový kužeľ valí (bez šmýkania) po kuželi herpolódiovom.

1.9. Pohyb úplne voľného tuhého telesa. Ako už vieme, poloha tuhého telesa úplne voľného je určená šiestimi vhodne zvolenými súradnicami troch jeho bodov, ktoré neležia na tej istej priamke. Môžeme ju však zrejme určiť pomocou troch súradníc jeho ľubovoľne zvoleného bodu a trocha Eulerovými uhlami.

Nech $\mathbf{r}_0$ je polohový vektor ľubovoľne zvoleného bodu O' tuhého telesa úplne voľného vzhľadom na nehybný bod O jeho okolia. Polohový vektor

iného bodu P telesa vzhľadom na bod O nech je $\mathbf{r}$, vzhľadom na bod O' $\mathbf{r}'$ (obr. 1.13). V tom prípade je

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{r}'$$

Derivovaním tejto rovnice podľa času pre rýchlosť $\mathbf{v}$ bodu P vzhľadom na okolie nášho telesa dostávame

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d\mathbf{r}_0}{dt} + \frac{d\mathbf{r}'}{dt} = \mathbf{v}_0 + \frac{d\mathbf{r}'}{dt}$$

kde $\mathbf{v}_0$ je rýchlosť bodu O' .

Práve takým spôsobom ako v predchádzajúcom článku môžeme však dokázať, že

$$\frac{d\mathbf{r}'}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}' \quad (1)$$

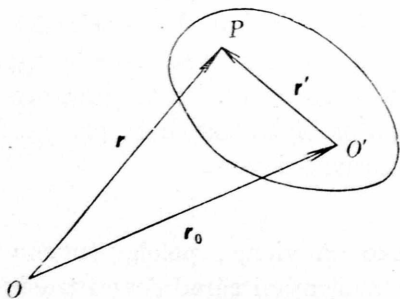
kde vektor $\boldsymbol{\omega}$ je od voľby bodu P v tuhom telese nezávislý. Preto je správny aj vzorec

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}' \quad (2)$$

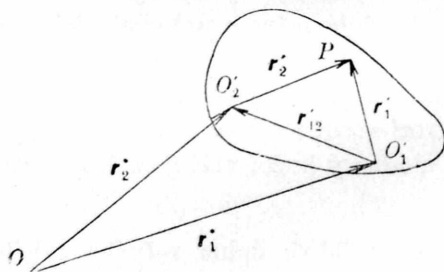
Vektor $\mathbf{r}'$ môžeme písať v tvare skalárneho násobku jednotkového vektora $\boldsymbol{\rho}'$ v jeho smere jeho absolútnou hodnotou r' , $\mathbf{r}' = r'\boldsymbol{\rho}'$. Delením rovnice (1) konštantnou absolútnou hodnotou r' vektora $\mathbf{r}'$ dostávame rovnicu

$$\frac{d\boldsymbol{\rho}'}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}' \quad (3)$$

ktorá vyjadruje deriváciu ľubovoľného, na tuhé teleso viazaného jednotkového vektora pri jeho akomkoľvek pohybe podľa času.



Obr. 1.13



Obr. 1.14

Význačne zvláštne prípady pohybu tuhého telesa sú pohyb *translačný* (*posuvný*) a pohyb *rotačný* (*otáčavý*). Hovoríme, že tuhé teleso je v *translačnom* pohybe, ak pri ňom spojnice hociktorých dvoch bodov telesa zachováva svoj

smere. To však značí, že pri translačnom pohybe tuhého telesa v rovnakých časových intervaloch všetky jeho body sa posunú o rovnakú trať v tom istom smere: pri translačnom pohybe tuhého telesa všetky jeho body sa pohybujú rovnakými strednými aj okamžitými rýchlosťami.

Z definície translačného pohybu však nevyplýva, že by sa rovnaká rýchlosť všetkých bodov takto sa pohybujúceho tuhého telesa s časom nemenila. Vo všeobecnosti pri translačnom pohybe tuhého telesa sa táto rýchlosť s časom mení v hodnote aj smere. Následkom toho jednotlivé body translačne sa pohybujúceho tuhého telesa vytvárajú najrozmanitejšie pohybové krivky, ktoré sú však pre všetky body telesa rovnaké. Sú len posunuté o vzájomnú vzdialenosť príslušných bodov.

Rotačným pohybom tuhého telesa nazývame taký jeho pohyb, pri ktorom sa tuhé teleso otáča okolo nehybnej priamky.

Podľa vzorca (2) vektor rýchlosti $\mathbf{v}$ ľubovoľne zvoleného bodu P úplne voľného tuhého telesa je súčet od voľby bodu P nezávislého vektora $\mathbf{v}_0$ a vektora $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'$, ktorý sám osebe vyjadruje rotačný pohyb telesa. Pri odvodzovaní vzorca (2) bod O' zvolili sme však tiež ľubovoľne. Podľa vzorca (2) každý pohyb tuhého telesa môžeme teda pokladať za súčet dvoch pohybov: translačného pohybu, s rýchlosťou rovnajúcou sa rýchlosti jedného bodu telesa, a rotačného pohybu, s uhlovou rýchlosťou $\boldsymbol{\omega}$ okolo okamžitej osi otáčania, ktorá týmto bodom prechádza.

Dokážeme ešte, že vektor uhlovej rýchlosti $\boldsymbol{\omega}$ vo vzorci (2) nezávisí od voľby bodu O' , ktorého rýchlosť je $\mathbf{v}_0$.

Dôkaz (obr. 1.14): Rýchlosť bodu P môžeme vyjadriť pomocou vzorca (2), opierajúc sa o bod O'_1 , ktorého rýchlosť nech je $\mathbf{v}_1$, alebo o bod O'_2 , ktorého rýchlosť nech je $\mathbf{v}_2$. Príslušné uhlové rýchlosti nech sú $\boldsymbol{\omega}_1$ a $\boldsymbol{\omega}_2$. Máme potom rovnicu

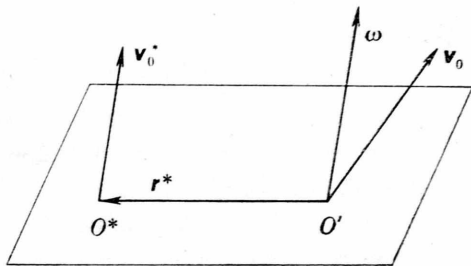
$$\mathbf{v}_1 + \boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{r}'_1 = \mathbf{v}_2 + \boldsymbol{\omega}_2 \times \mathbf{r}'_2 = \mathbf{v}_1 + \boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{r}'_{12} + \boldsymbol{\omega}_2 \times \mathbf{r}'_2$$

z ktorej postupne dostávame

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\omega}_1 \times (\mathbf{r}'_1 - \mathbf{r}'_{12}) &= \boldsymbol{\omega}_2 \times \mathbf{r}'_2 \\ \boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{r}'_2 &= \boldsymbol{\omega}_2 \times \mathbf{r}'_2\end{aligned}$$

alebo, keďže vektor $\mathbf{r}'_2$ je ľubovoľný, $\boldsymbol{\omega}_1 = \boldsymbol{\omega}_2$.

Veďme bodom O' (obr. 1.15) náhodile sa pohybujúceho tuhého telesa, ktorého rýchlosť je $\mathbf{v}_0$, rovinu kolmú na vektor $\boldsymbol{\omega}$ a hľadáme v nej taký bod O^* ,



Obr. 1.15

ktorého rýchlosť $\mathbf{v}_0^*$ je s vektorom $\boldsymbol{\omega}$ rovnobežná. Jeho polohový vektor vzhľadom na bod O' nech je $\mathbf{r}^*$. Ak takýto bod existuje, vektor $\mathbf{r}^*$ spĺňa rovnicu vyplývajúcu z rovnice $\mathbf{v}_0^* \boldsymbol{\omega} \times = 0$

$$(\mathbf{v}_0 + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}^*) \times \boldsymbol{\omega} = 0$$

t. j.

$$\mathbf{v}_0 \times \boldsymbol{\omega} + \omega^2 \mathbf{r}^* = 0$$

Teda

$$\mathbf{r}^* = \frac{\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_0}{\omega^2} \quad (4)$$

a pre rýchlosť bodu O^* vychádza

$$\mathbf{v}_0^* = \mathbf{v}_0 + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}^* = \mathbf{v}_0 + \frac{\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_0)}{\omega^2}$$

Vedme bodom O^* , ktorého polohu v tuhom telese určuje vzorec (4), priamku C rovnobežnú s vektorom $\boldsymbol{\omega}$ a zvolíme na nej ľubovoľne bod A . Jeho polohový vektor vzhľadom na bod O^* nech je $\mathbf{r}'$. Pre jeho rýchlosť podľa vzorca (2) dostávame

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{r}^* + \mathbf{r}') = \mathbf{v}_0 + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}^* = \mathbf{v}_0^*$$

lebo vektory $\boldsymbol{\omega}$ a $\mathbf{r}'$ sú navzájom rovnobežné. Všetky body priamky C pohybujú sa teda rovnako a rovnobežne s vektorom $\boldsymbol{\omega}$.

Pri každom pohybe tuhého telesa jestvuje v telese v každom okamihu jedna a len jedna priamka C [vzorec (4) určuje bod O^* jednoznačne], ktorej všetky body sa pohybujú rovnako a s vektorom okamžitej uhlovej rýchlosti telesa $\boldsymbol{\omega}$ rovnobežne. Nazýva sa *centrálnou osou* pohybu telesa pre daný okamih.

Z významu vektorov $\mathbf{v}_0^*$ a $\boldsymbol{\omega}$ je jasné, že tuhé teleso sa pri každom svojom pohybe pohybuje pozdĺž centrálnej osi svojho pohybu rýchlosťou $\mathbf{v}_0^*$ a súčasne sa okolo nej otáča uhlovou rýchlosťou $\boldsymbol{\omega}$. Každý pohyb tuhého telesa je teda *skrutkovitý*. Ak vektory $\mathbf{v}_0^*$ a $\boldsymbol{\omega}$ sú súhlasne rovnobežné, pohyb telesa má charakter *pravotočivej skrutkovice*, v opačnom prípade charakter *ľavotočivej skrutkovice*.

Jednotlivé polohy okamžitých centrálnych osí pohybu úplne voľne sa pohybujúceho tuhého telesa vytvárajú v ňom priamkovú plochu polódiíovú, v okolnom priestore priamkovú plochu herpolódiíovú. Pohyb telesa prebieha tak, že sa polódiíová plocha valí po ploche herpolódiíovej a súčasne sa sunie pozdĺž spoločnej povrchovej priamky obidvoch plôch.

1.10. Absolútna a relatívna derivácia vektora. S telesom T' , ktoré sa vzhľadom na iné teleso T ľubovoľným spôsobom pohybuje, nech je pevne spojený súradnicový systém S' , daný jednotkovými vektormi $\mathbf{i}'$, $\mathbf{j}'$ a $\mathbf{k}'$. Ľubovoľný