Pri vhodnej voľbe koeficientov λ_1 a λ_2 (variácie δw_i spĺňajú teraz dve podmienky) je posledná rovnica splnená pri akýchkoľvek hodnotách variácií δw_i. Pre relatívnu početnosť w_i máme preto teraz rovnicu $\log w_i + \lambda_1 + \lambda_2 \varepsilon_i = 0$ alebo rovnicu

$$w_i = e^{-\lambda_1 - \lambda_2 \varepsilon_i}$$

Položme $-\lambda_1 = \dfrac{\varphi}{\Theta}$ a $\lambda_2 = \dfrac{1}{\Theta}$. Máme potom:

$$w_i = e^{\frac{\varphi - \varepsilon_i}{\Theta}} \tag{4}$$

a

$$n_i = n w_i = n\, e^{\frac{\varphi - \varepsilon_i}{\Theta}} \tag{5}$$

Konštanty φ a Θ v tejto rovnici sú určené podmienkami $\Sigma w_i = 1$ a $\Sigma n_i \varepsilon_i = E$, pričom poslednú podmienku môžeme písať aj v tvare $\Sigma w_i\, \varepsilon_i = \dfrac{E}{n} = \varepsilon$. Konštantu φ môžeme z rovnice (4) vylúčiť pomocou prvej podmienky. Sumáciou obidvoch strán tejto rovnice dostávame rovnicu

$$\sum e^{\frac{\varphi - \varepsilon_i}{\Theta}} = \sum w_i = 1$$

takže

$$e^{\frac{\varphi}{\Theta}} = \frac{1}{\sum e^{-\frac{\varepsilon_i}{\Theta}}}$$

Rovnica (4) je teda aj

$$w_i = e^{\frac{\varphi}{\Theta}} \,.\, e^{-\frac{\varepsilon_i}{\Theta}} = \frac{e^{-\frac{\varepsilon_i}{\Theta}}}{\sum e^{-\frac{\varepsilon_i}{\Theta}}} \tag{6}$$

Konštantu Θ určuje rovnica $\varepsilon = \dfrac{E}{n} = \sum w_i \varepsilon_i$, t. j. rovnica

$$\varepsilon = \frac{\sum \varepsilon_i\, e^{-\frac{\varepsilon_i}{\Theta}}}{\sum e^{-\frac{\varepsilon_i}{\Theta}}} \tag{7}$$

10.6. Rozdelenie molekúl podľa rýchlosti v jednoatómovom plyne. Plyn sa nazýva jednoatómový, keď sú jeho molekuly, ktoré sú vo všeobecnosti súbormi atómov, totožné s atómami plynu. Takými plynmi aj za obyčajnej teploty sú tzv. vzácne plyny, hélium, neón, argón, kryptón, xenón a radón, a za vysokých teplôt k nim patria aj pary kovov. Podľa obsahu čl. 10.4 molekuly plynu v tomto najjednoduchšom prípade môžeme považovať za veľmi malé pružné gule, ktoré sa rôznymi rýchlosťami pohybujú vo všetkých možných smeroch, pričom sa rýchlosti molekúl plynu náhle menia len pri ich zrážkach s pevnou prekážkou alebo s inými molekulami plynu.

Podľa Maxwella relatívnu početnosť molekúl takéhoto plynu, pohybujúcich sa rýchlosťami, ktoré sú málo odlišné od určitej pevne zvolenej rýchlosti, určuje princíp štatistickej pravdepodobnosti pri rešpektovaní príslušnej vedľajšej podmienky, ktorou je v tomto prípade konštantná celková kinetická energia E všetkých n molekúl daného množstva plynu. Pritom za molekuly patriace do tohože oddelenia treba podľa Maxwella pokladať tie molekuly, ktorých vektory rýchlosti $\mathbf{v}_i$ sú také, že pri spoločnom začiatku sa ich koncové body nachodia v tom istom trojrozmernom obore $\Delta\tau = \Delta v_x \,.\, \Delta v_y \,.\, \Delta v_z$.

Kinetická energia molekuly hmotnosti m, ktorá sa pohybuje rýchlosťou $\mathbf{v}$, je $\frac{1}{2} mv^2$. Keď celková kinetická energia všetkých n molekúl plynu je E, takže priemerná hodnota tejto energie je $\varepsilon = E/n$, za stavu maximálnej štatistickej pravdepodobnosti počet molekúl, ktorých vektory rýchlosti svojimi koncovými bodmi spadajú do toho istého oboru $\Delta\tau = \Delta v_x \,.\, \Delta v_y \,.\, \Delta v_z$, je určený vzorcom (10.5.5)

$$n_i = n\, e^{\frac{\varphi - \varepsilon_i}{\Theta}}$$

kde ε_i je kinetická energia molekúl patriacich do i-tého oddelenia. Podľa vzorca (10.5.6) relatívna početnosť týchto molekúl je:

$$w_i = \frac{e^{-\frac{\varepsilon_i}{\Theta}}}{\sum e^{-\frac{\varepsilon_i}{\Theta}}} \tag{1}$$

Konštantu Θ určuje rovnica (10.5.7)

$$\frac{\sum \varepsilon_i\, e^{-\frac{\varepsilon_i}{\Theta}}}{\sum e^{-\frac{\varepsilon_i}{\Theta}}} = \varepsilon \tag{2}$$

Aby sme ju mohli z tejto rovnice vypočítať, menovateľa zlomku na ľavej strane znamienka rovnosti nahradíme integrálom. Dostávame:

$$\sum e^{-\frac{\varepsilon_i}{\Theta}} = \frac{1}{\Delta\tau} \int e^{-\frac{\varepsilon_i}{\Theta}} d\tau = \frac{1}{\Delta\tau} \int e^{-\frac{mv^2}{2\Theta}} d\tau =$$

$$= \frac{1}{\Delta\tau} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{mv_x^2}{2\Theta}} . e^{-\frac{mv_y^2}{2\Theta}} . e^{-\frac{mv_z^2}{2\Theta}} dv_x\, dv_y\, dv_z =$$

$$= \frac{1}{\Delta\tau} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{mv_z^2}{2\Theta}} dv_z \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{mv_y^2}{2\Theta}} dv_y \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{mv_x^2}{2\Theta}} dv_x$$

Keďže $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$, *) je tiež

$$\sum e^{-\frac{\varepsilon_i}{\Theta}} = \frac{1}{\Delta\tau} \left(\frac{2\pi\Theta}{m}\right)^{\frac{3}{2}} \tag{3}$$

Derivovaním tejto rovnice podľa Θ vychádza:

$$\frac{1}{\Theta^2} \sum \varepsilon_i\, e^{-\frac{\varepsilon_i}{\Theta}} = \frac{1}{\Delta\tau} \frac{3}{2} \left(\frac{2\pi\Theta}{m}\right)^{\frac{1}{2}} . \frac{2\pi}{m}$$

Delením tejto rovnice rovnicou predchádzajúcou dostávame výsledok $\frac{\varepsilon}{\Theta^2} = \frac{3}{2\Theta}$, podľa ktorého je:

$$\Theta = \frac{2}{3} \varepsilon \tag{4}$$

takže je tiež

$$\varepsilon = \frac{3}{2} \Theta \tag{5}$$

Podľa výsledkov (1), (3) a (4) relatívna početnosť jednoatómových molekúl plynu, ktoré sa pohybujú tak, že koncové body vektorov ich rýchlosti spadajú do tohože oboru $\Delta\tau = \Delta v_x . \Delta v_y . \Delta v_z$, je teda

---

*) Laplaceov integrál $J = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx$ môžeme vypočítať takto

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)} dx\, dy = \int\limits_{0}^{\infty} e^{-r^2} dS = \int\limits_{0}^{\infty} e^{-r^2} 2\pi r\, dr =$$

$= \int\limits_{0}^{\infty} e^{-r^2} \pi\, d(r^2) = [-\pi\, e^{-r^2}]_0^\infty = \pi$. Platí ale tiež $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)} dx\, dy =$

$$= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} dy \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = J^2, \text{ a preto } J = \sqrt{\pi}.$$

$$w = \frac{e^{-\frac{3mv^2}{4\varepsilon}}}{\left(\frac{4\pi\varepsilon}{3m}\right)^{\frac{3}{2}}} \Delta\tau \tag{6}$$

Vo vzorci (6) je $\varepsilon = \frac{E}{n} = \frac{\sum n_i \varepsilon_i}{n} = \frac{\sum n_i \frac{1}{2} m v_i^2}{n} = \frac{1}{2} m \frac{\sum n_i v_i^2}{n} = \frac{1}{2} m v_s^2$, kde $v_s = \sqrt{\frac{\sum n_i v_i^2}{n}}$ je tzv. *stredná rýchlosť* molekúl plynu. Vzorec (6) môžeme teda prepísať aj na tvar

$$w = \frac{e^{-\frac{3v^2}{2v_s^2}}}{\left(\frac{2}{3}\pi v_s^2\right)^{\frac{3}{2}}} \Delta\tau \tag{7}$$

Relatívnu početnosť $f(v)\,\mathrm{d}v$ molekúl, ktoré sa pohybujú tak, že abs. hodnota ich rýchlosti je v intervale v až $v + \mathrm{d}v$, pričom smer rýchlosti je akýkoľvek, dostaneme zrejme tak, že vo vzorci (7) píšeme: $\Delta\tau = 4\pi v^2\,\mathrm{d}v$. Vychádza:

$$f(v)\,\mathrm{d}v = \frac{4\pi v^2 e^{-\frac{3v^2}{2v_s^2}}}{\left(\frac{2}{3}\pi v_s^2\right)^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}v \tag{8}$$

Názorný význam funkcie

$$f(v) = \frac{4\pi v^2 e^{-\frac{3v^2}{2v_s^2}}}{\left(\frac{2}{3}\pi v_s^2\right)^{\frac{3}{2}}} \tag{9}$$

ktorá vyjadruje veľmi významný Maxwellov zákon rozdelenia molekúl podľa ich rýchlostí, nájdeme pomocou tejto jednoduchej úvahy: Nech je $F(v)$ relatívna početnosť tých molekúl, ktoré sa pohybujú rýchlosťami s absolútnymi hodnotami spadajúcimi do intervalu 0 až v. Potom $\mathrm{d}F(v) = F'(v)\,\mathrm{d}v$ je zrejme relatívna početnosť molekúl pohybujúcich sa rýchlosťami s absolútnymi hodnotami spadajúcimi do intervalu v až $v + \mathrm{d}v$. Táto početnosť je však aj $f(v)\,\mathrm{d}v$. Z porovnania obidvoch vyjadrení tejto relatívnej početnosti vyplýva:

$$f(v) = \frac{\mathrm{d}F(v)}{\mathrm{d}v} \tag{10}$$

10.7. Tlak plynu na stenu. Podľa kinetickej teórie plynov príčinou tlaku plynu na stenu nádoby, v ktorej sa plyn nachodí, sú ustavičné pružné nárazy jeho molekúl na túto stenu. Pri takomto náraze zložka hybnosti molekuly