2.12. Newtonov gravitačný zákon. Newtonov zákon sily $\boldsymbol{f} = m\boldsymbol{a}$ môže sa pri riešení fyzikálnych úloh použiť dvojakým spôsobom. Ak je známa sila pôsobiaca na hmotný bod ako funkcia jeho polohy (v inerciálnom systéme) a času, riešením rovnice $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{r}, t) = m\boldsymbol{a} = m \dfrac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}$ pri známej polohe $\boldsymbol{r}_0$ a rýchlosti $\boldsymbol{v}_0$ hmotného bodu v čase $t = t_0$ dostávame polohový vektor pohybujúceho sa bodu ako funkciu času čiže kinematický popis pohybu. Ak, naopak, poznáme kinematické, priamym pozorovaním získané zákonitosti pohybu hmotného bodu v danom silovom poli, Newtonov zákon sily umožňuje nájsť príslušný silový zákon.

Pre rozvoj mechaniky veľmi významným príkladom úvah, prostredníctvom ktorých sa zo známeho pohybu odvodzuje sila riadiaca tento pohyb, je Newtonovo odvodenie jeho zákona všeobecnej gravitácie (vzájomnej príťažlivosti telies). Pri odvodzovaní svojho gravitačného zákona vychádzal Newton z *Keplerových zákonov*, opisujúcich pohyb planét, ktoré Kepler[1]) odvodil z dôkladných astronomických pozorovaní.

Keplerove zákony sú:

1. *Planéty obiehajú okolo Slnka po elipsách s malou výstrednosťou, pričom Slnko sa nachodí v ich spoločnom ohnisku.*

2. *Plochy opísané sprievodičom tejže planéty, vzťahujúcim sa na stred Slnka, v ľubovoľných dvoch rovnakých časových intervaloch sú rovnaké.*

3. *Druhé mocniny obežných dôb planét pri ich obiehaní okolo Slnka sú úmerné tretím mocninám veľkých polosí ich eliptických dráh.*

Odvodenie Newtonovho gravitačného zákona zo zákonov Keplerových za predpokladu eliptických dráh planét vyžaduje dlhší výpočet. Tomu sa môžeme vyhnúť použitím zjednodušujúceho, s Keplerovými zákonmi zrovnateľného predpokladu, že dráhy planét sú kružnice. Keplerove zákony pripúšťajú totiž akúkoľvek výstrednosť eliptických dráh planét, teda aj výstrednosť nulovú, a elipsa s nulovou výstrednosťou je kružnica. Ak sú teda Keplerove zákony správne, správne sú aj v prípade, že dráhy planét sú kruhové. Okrem toho planéty Slnka obiehajú okolo neho po elipsách s veľmi malou číselnou výstrednosťou (číselná výstrednosť eliptickej dráhy Zeme je napríklad len $\varepsilon = e/a = 0{,}0167$), takže predpoklad kruhových dráh je veľmi blízky aj skutočnosti.

Pri odvodzovaní Newtonovho gravitačného zákona budeme teda pre jednoduchosť predpokladať, že planéty obiehajú okolo Slnka po dráhach kruhových.

---

[1]) Johannes Kepler (1571—1630), nemecký astronóm, od r. 1600 pomocník, neskôr nástupca Tycha de Brahe v Prahe ako cisársky matematik. Svoje slávne zákony odvodil z pozorovaní svojho predchodcu a vlastných.

K veci sa vrátime v čl. 2.22, v ktorom opačne, opierajúc sa o Newtonov zákon sily, z Newtonovho gravitačného zákona odvodíme pohyb planéty po dráhe eliptickej pri daných začiatočných podmienkach, pričom sa súčasne presvedčíme, že ak Newtonov gravitačný zákon platí presne, pohyby planét musia byť v skutočnosti o niečo zložitejšie, ako ich opisujú pomerne jednoduché zákony Keplerove.

Podľa prvého Keplerovho zákona, ak dráha planéty je kružnica, Slnko sa nachodí v jej strede. Z druhého Keplerovho zákona potom vyplýva, že planéta sa pohybuje po svojej kruhovej dráhe s polomerom r rovnomerne, t. j. rýchlosťou s konštantnou absolútnou hodnotou

$$v = \frac{2\pi r}{T} \tag{1}$$

ak je T obežná doba.

Ako už vieme, pri rovnomernom pohybe bodu po kružnici zrýchlenie smeruje do stredu kružnice; tangenciálne zrýchlenie sa rovná nule a zostávajúce dostredivé zrýchlenie má abs. hodnotu $a = v^2/r$. Zrýchlenie planéty, ktoré smeruje do stredu kruhovej dráhy čiže k Slnku, má teda abs. hodnotu

$$a = \frac{v^2}{r} = \frac{4\pi^2}{T^2} r \tag{2}$$

Ale podľa tretieho Keplerovho zákona je

$$T^2 = cr^3 \tag{3}$$

pričom konštanta úmernosti c, keďže vzťah (3) platí pre všetky planéty Slnka, môže byť závislá len od vlastností Slnka.

Keď dosadíme vzťah (3) do vzťahu (2), dostaneme

$$a = \frac{4\pi^2}{cr^3} r = \frac{4\pi^2}{c} \frac{1}{r^2} = k \frac{1}{r^2} \tag{4}$$

a konštanta úmernosti k môže byť opäť závislá len od vlastností Slnka.

Podľa Newtonovho zákona sily na planétu hmotnosti m pôsobí teda sila do stredu Slnka smerujúca, ktorej absolútna hodnota je

$$f = ma = km \frac{1}{r^2} \tag{5}$$

Ale keď posledný vzťah má byť všeobecným vyjadrením silového pôsobenia hmotného telesa na iné takéto teleso, planéta musí účinkovať na Slnko silou s absolútnou hodnotou

$$f' = k'M \frac{1}{r^2} \tag{6}$$

kde konštanta úmernosti k' môže byť závislá len od vlastností planéty.

Podľa zákona akcie a reakcie však $f' = f$, teda $k'M = km$, alebo

$$\frac{k}{M} = \frac{k'}{m} = \varkappa \tag{7}$$

takže $k = \varkappa M$ a $k' = \varkappa m$. Keď dosadíme vzťah $k = \varkappa M$ do vzorca (5) alebo vzťah $k' = \varkappa m$ do vzorca (6), dostaneme pre absolútne hodnoty príťažlivých síl, ktorými na seba účinkujú Slnko a planéta, výsledok

$$f = \varkappa \frac{Mm}{r^2} \tag{8}$$

Pri odvodzovaní vzorca (8) Slnko a planétu sme považovali za hmotné body. Podľa Newtona vzorec (8) je presným vyjadrením absolútnej hodnoty síl, ktorými sa priťahujú dva ľubovoľné hmotné body, pričom konštanta úmernosti $\varkappa$, Newtonova gravitačná konštanta, má všeobecnú platnosť; je to univerzálna konštanta.

Hmotný bod hmotnosti M účinkuje teda na iný hmotný bod hmotnosti m, ktorý je od neho vo vzdialenosti r, príťažlivou silou s absolútnou hodnotou určenou vzorcom (8) a ak je tento voľný, udeľuje mu zrýchlenie s absolútnou hodnotou

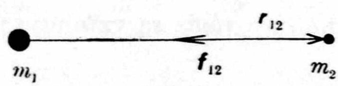
$$a = \frac{f}{m} = \varkappa \frac{M}{r^2} \tag{9}$$

Ak hmoty dvoch hmotných bodov označíme m_1 a m_2, bude

$$f = \varkappa \frac{m_1 m_2}{r^2} \tag{10}$$

Vzorec (10) upravíme ešte na vektorový tvar. Nech je $\mathbf{r}_{12}$ polohový vektor hmotného bodu hmotnosti m_2 vzhľadom na miesto hmotného bodu hmotnosti m_1. Absolútna hodnota vektora $\mathbf{r}_{12}$ nech je r. Silu $\mathbf{f}_{12}$, ktorou hmotný bod m_1 pôsobí na hmotný bod m_2, dostaneme, ak jej absolútnu hodnotu danú vzorcom (10) znásobíme jednotkovým vektorom v jej smere *(obr. 2.13)*. Tento jednotkový vektor, keďže gravitačná sila je príťažlivá, je $-\frac{\mathbf{r}_{12}}{r}$. Sila $\mathbf{f}_{12}$ je teda

$$\mathbf{f}_{12} = -\varkappa \frac{m_1 m_2}{r^3} \mathbf{r}_{12} \tag{11a}$$



Obr. 2.13

Hmotný bod s hmotnosťou M pôsobí teda na hmotný bod s hmotnosťou m, ktorého polohový vektor vzhľadom na bod hmotnosti M je $\mathbf{r}$, silou

$$\mathbf{f} = -\varkappa \frac{Mm}{r^3} \mathbf{r} \tag{11b}$$

Vzorce (11) sú vektorovým vyjadrením Newtonovho gravitačného zákona. Práve tak ako vzorce (8), (9) a (10), aj vzorce (11) platia vo všeobecnosti presne len pre dva hmotné body. V čl. 2.14 sa však presvedčíme, že platí aj pre dve homogénne hmotné gule, ktorých stredy sa nachádzajú v ľubovoľnej vzájomnej vzdialenosti r.

Ak chceme nájsť gravitačnú silu, ktorou účinkuje ľubovoľné teleso T na iné ľubovoľne zvolené teleso T', môžeme postupovať takto: Pretože hľadaná sila je súčet síl ako vektorov, ktorými účinkujú všetky objemové elementy telesa T na všetky objemové elementy telesa T', pomocou Newtonovho gravitačného zákona vyjadríme najprv silu, ktorou objemový element telesa T hmotnosti $\mathrm{d}m$ účinkuje na objemový element telesa T' hmotnosti $\mathrm{d}m'$. Pretože objemové elementy telies môžeme považovať za hmotné body, ak polohový vektor objemového elementu telesa T' vzhľadom na miesto objemového elementu telesa T je $\mathbf{r}$, podľa vzorca (11) objemový element telesa T účinkuje na objemový element telesa T' silou

$$\mathrm{d}^2\mathbf{f} = -\varkappa \frac{\mathrm{d}m\,\mathrm{d}m'}{r^3}\,\mathbf{r}$$

Celé teleso T účinkuje teda na objemový element telesa T' silou

$$\mathrm{d}\mathbf{f} = -\varkappa\,\mathrm{d}m' \int_T \frac{\mathrm{d}m}{r^3}\,\mathbf{r}$$

pričom integrácia sa vzťahuje na vnútro telesa T, premennými sú súradnice začiatku polohového vektora $\mathbf{r}$ a integrál sám je funkciou polohy objemového elementu v telese T'. Teleso T účinkuje teda na teleso T' silou

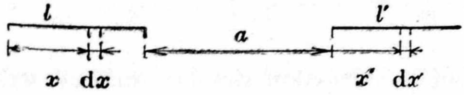
$$\mathbf{f} = -\varkappa \int_{T'} \mathrm{d}m' \int_T \frac{\mathrm{d}m}{r^3}\,\mathbf{r} \tag{12}$$

pričom druhá integrácia sa vzťahuje na vnútro telesa T'.

Príklad 1. Vypočítame gravitačnú silu, ktorou účinkuje hmotná úsečka hmotnosti M a dĺžky l na hmotnú úsečku hmotnosti M' a dĺžky l', ak obidve úsečky ležia v tejže priamke vo vzájomnej vzdialenosti a od seba *(obr. 2.14)*.

Pretože všetky sily, ktorými účinkujú elementy prvej úsečky na elementy druhej úsečky, sú súhlasne rovnobežné, stačí počítať s ich absolútnymi hodnotami. Podľa *obr. 2.14* a vzorca (10) dĺžkový element $\mathrm{d}x$ prvej úsečky účinkuje na dĺžkový element $\mathrm{d}x'$ druhej úsečky silou s absolútnou hodnotou

$$\mathrm{d}^2 f = \varkappa \frac{M'}{l'} \mathrm{d}x' \frac{M}{l} \cdot \frac{\mathrm{d}x}{(l + a + x' - x)^2}$$



Obr. 2.14

Úsečka prvá účinkuje teda na dĺžkový element úsečky druhej silou s absolútnou hodnotou

$$\mathrm{d}f = \varkappa \frac{MM'}{ll'} \mathrm{d}x' \int_0^l \frac{\mathrm{d}x}{(l + a + x' - x)^2}$$

Zavedieme substitúciu $u = l + a + x' - x$, takže bude $\mathrm{d}x = -\mathrm{d}u$, a teda

$$\mathrm{d}f = -\varkappa \frac{MM'}{ll'} \mathrm{d}x' \int_{l+a+x'}^{a+x'} \frac{\mathrm{d}u}{u^2} = \varkappa \frac{MM'}{ll'} \mathrm{d}x' \left[\frac{1}{u}\right]_{l+a+x'}^{a+x'} =$$

$$= \varkappa \frac{MM'}{ll'} \mathrm{d}x' \left(\frac{1}{a + x'} - \frac{1}{l + a + x'}\right)$$

Hľadaná sila je teda

$$f = \varkappa \frac{MM'}{ll'} \int_0^{l'} \frac{\mathrm{d}x'}{a + x'} - \varkappa \frac{MM'}{ll'} \int_0^{l'} \frac{\mathrm{d}x'}{l + a + x'}$$

Ak pre prvý integrál zavedieme substitúciu $v = a + x'$ a pre druhý integrál substitúciu $w = l + a + x'$, dostaneme

$$f = \varkappa \frac{MM'}{ll'} \int_a^{a+l'} \frac{\mathrm{d}v}{v} - \varkappa \frac{MM'}{ll'} \int_{l+a}^{l+a+l'} \frac{\mathrm{d}w}{w} = \varkappa \frac{MM'}{ll'} \ln \frac{(a + l')(l + a)}{a(l + a + l')}$$

V prípade dvoch rovnakých hmotných úsečiek hmotnosti M a dĺžky l bola by táto sila

$$f = \varkappa \frac{M^2}{l^2} \ln \frac{(l + a)^2}{a(2l + a)}$$

alebo, ak namiesto vzdialenosti a priľahlých koncov obidvoch úsečiek zavedieme vzájomnú vzdialenosť ich stredov $r = l + a$,

$$f = \varkappa \frac{M^2}{l^2} \ln \frac{r^2}{(r - l)(r + l)} = \varkappa \frac{M^2}{l^2} \ln \frac{1}{1 - \frac{l^2}{r^2}}$$

Keby dĺžky úsečiek boli vzhľadom na vzájomnú vzdialenosť ich stredov malé, sila f by bola

$$f \doteq \varkappa \frac{M^2}{l^2} \ln \left(1 + \frac{l^2}{r^2}\right) \doteq \varkappa \frac{M^2}{l^2} \cdot \frac{l^2}{r^2} = \varkappa \frac{M^2}{r^2}$$

čiže by úsečky pôsobili na seba silou ako dva hmotné body.

Podľa Newtonovho gravitačného zákona sily, ktorými účinkuje Slnko na planéty, sú tej istej povahy ako napr. sily, ktorými účinkuje Zem na telesá v svojom okolí. Teda sila, ktorou účinkuje Zem na Mesiac, a sily, ktorými naša Zem pôsobí na voľne pustené alebo šikmo hodené telesá, riadia sa tým istým silovým zákonom.

Nech je hmotnosť Zeme M a hmotnosť napríklad voľne pusteného telesa m. Polomer Zeme, ktorá má tvar približne guľový, označme R. Ako sme už vyššie naznačili, homogénna hmotná guľa, teda prakticky aj Zem, budí v svojom okolí práve také gravitačné silové pole ako hmotný bod s rovnakou hmotnosťou, ktorý by sa nachádzal v jej strede. V malej výške nad povrchom zemským pustenému telesu udeľuje teda Zem zrýchlenie (vzhľadom na stálice) a dané vzorcom (9), tzv. *zrýchlenie gravitačné*. Zrýchlenie vzhľadom na zemský povrch (tzv. *zrýchlenie voľného pádu* telies vo vákuu $g \doteq 9{,}81\ \mathrm{ms}^{-2}$) v dôsledku otáčavého pohybu Zeme je od zrýchlenia gravitačného odlišné. Súvis udáva vzorec (1.11.4) na str. 53. Rozdiel obidvoch zrýchlení v dôsledku pomerne malej rotačnej rýchlosti Zeme je však pre tieto naše úvahy zanedbateľne malý, takže môžeme písať

$$a = g = 9{,}81\ \mathrm{ms}^{-2}$$

Podľa astronomických pozorovaní stred Mesiaca je od stredu Zeme (s polomerom R) približne vo vzdialenosti $r = 60R$. Ak jeho hmotu označíme m', podľa Newtonovho gravitačného zákona účinkuje Zem na Mesiac silou s absolútnou hodnotou

$$f' = \varkappa \frac{Mm'}{60^2R^2}$$

a udeľuje mu zrýchlenie

$$a' = \frac{f'}{m'} = \varkappa \frac{M}{60^2R^2} = \frac{a}{3\,600} = \frac{9{,}81}{3\,600}\ \mathrm{ms}^{-2}$$

Tento výsledok môžeme porovnať s hodnotou vyplývajúcou zo skutočného pohybu Mesiaca okolo Zeme. Mesiac obieha okolo Zeme po dráhe približne kruhovej s polomerom $r \doteq 60R = 60 \cdot \frac{40 \cdot 10^6}{2\pi}$ m $= 60 \cdot 6{,}37 \cdot 10^6$ m a obežná doba je 25 dní 7 hodín a 43 min, čiže $T = 2{,}36 \cdot 10^6$ s. Dostredivé zrýchlenie Mesiaca pri jeho obiehaní okolo Zeme je teda

$$a' = \frac{v^2}{r} = \frac{4\pi^2 r^2}{T^2 r} = \frac{4\pi^2 r}{T^2} = \frac{4\pi^2 \cdot 60 \cdot 6{,}37 \cdot 10^6\ \mathrm{m}}{2{,}36^2 \cdot 10^{12}\ \mathrm{s}^2} = 0{,}0027\ \mathrm{ms}^{-2}$$

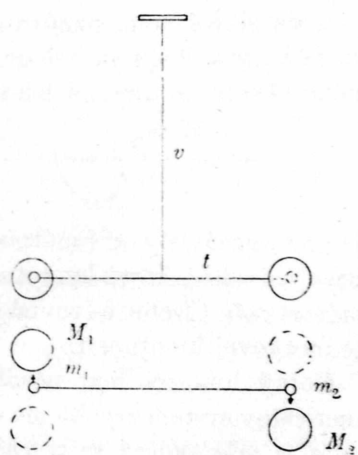
Ľahko sa môžeme presvedčiť, že sa tento výsledok zhoduje s hodnotou $9{,}81\ \mathrm{ms}^{-2}/3\,600$. Súhlas je významným overením všeobecnej platnosti Newtonovho gravitačného zákona.

Vo všetkých vzorcoch, akým je napr. vzorec (9), ktoré vyjadrujú gravitačné silové pôsobenie hmotného telesa na iné takéto teleso, gravitačná konštanta $\varkappa$ vystupuje vždy v súčine s hmotnosťou telesa, ktoré je príčinou silového pôsobenia. Nemožno ju preto vypočítať z výsledkov astronomických pozorovaní, z ktorých vyplývajú len zrýchlenia. Gravitačná konštanta $\varkappa$ sa preto musí určovať vhodným laboratórnym meraním. Ako prvý určil gravitačnú konštantu anglický chemik a fyzik H. Cavendish (1731—1810), a to metódou torzných váh.

Na dlhom, jemnom a pružnom vlákne v *(obr. 2.15)* visí ľahká tyčinka t, nesúca dve rovnaké guľôčky m_1 a m_2. Za prvú a pred druhú vložia sa dve tiež rovnaké a veľmi hmotné gule M_1 a M_2 (poloha I); ich gravitačným účinkom na guľôčky m_1 a m_2 sa tyčinka t pootočí o malý uhol v smere k veľkým hmotným guliam. Ak sa tieto potom preložia do polohy II, nastane pootočenie tyčinky t v opačnom zmysle. Pootočenia tyčinky t sú úmerné gravitačným silám pôsobiacim medzi veľkými a malými guľami. Ak sme tieto sily vypočítali za použitia rozmerov zariadenia a vlastností pružného vlákna v, vzorec (8) umožňuje vypočítať aj gravitačnú konštantu $\varkappa$. Pri novších meraniach sa dosiahli výsledky, podľa ktorých gravitačná konštanta je

$$\varkappa = 6{,}670 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{m}^3\ \mathrm{kg}^{-1}\ \mathrm{s}^{-2}$$

Gravitačná konštanta má veľký význam pre geofyziku a astronómiu. Pomocou nej môžeme ľahko vypočítať hmotnosť našej Zeme aj hmotnosti nebeských telies, ak majú obežnice. Ako už vieme, ak M značí hmotnosť Zeme a R jej polomer, pre zrýchlenie $g = 9{,}81\ \mathrm{ms}^{-2}$ telies



Obr. 2.15

voľne sa pohybujúcich v blízkosti povrchu Zeme platí približne $g = \varkappa \dfrac{M}{R^2}$, takže

$$M = \frac{gR^2}{\varkappa} = \frac{9{,}81 \,.\, (6{,}37 \,.\, 10^6)^2}{6{,}68 \,.\, 10^{-11}}\ \text{kg} = 5{,}98 \,.\, 10^{24}\ \text{kg}$$

Priemerná merná hmotnosť Zeme je teda

$$s = \frac{M}{\dfrac{4}{3}\pi R^3} = \frac{3g}{4\pi\varkappa R} = \frac{3 \,.\, 9{,}81\ \text{kgm}^{-3}}{4\pi \,.\, 6{,}685 \,.\, 10^{-11} \,.\, 6{,}37 \,.\, 10^6} = 5{,}5\ \text{g/cm}^3$$

Hmotnosť M nebeského telesa s obežnicou môžeme určiť aj pomocou vzorca (9), ak v ňom za r dosadíme polomer kruhovej alebo aspoň približne kruhovej dráhy obežnice centrálneho telesa a zrýchlenie a obežnice určíme z obežnej doby: $a = \dfrac{v^2}{r} = \dfrac{4\pi^2 r}{T^2}$. Hmotnosť Zeme sme mohli teda počítať aj pomocou obežnej dráhy Mesiaca. Približnú hodnotu hmotnosti Slnka dostaneme, ak vo vzorci (9) zrýchlenie a vyjadríme pomocou hodnôt vyplývajúcich z obiehania Zeme okolo Slnka po približne kruhovej dráhe, teda z rovnice

$$\frac{4\pi^2 r}{T^2} = \varkappa \frac{M}{r^2}$$

Keďže v tomto prípade približne $r = 149 \,.\, 10^6$ km $= 149 \,.\, 10^9$ m a $T =$ $= 365$ dní 6 h $= 315 \,.\, 10^5$ s, pre hmotnosť Slnka vychádza $M = 1{,}98 \,.\, 10^{30}$ kg.

2.13. Intenzita a potenciál v gravitačnom poli. Na hmotný element kdekoľvek v okolí hmotných telies pôsobí gravitačná sila. Priestor v okolí hmotných telies je teda silové pole, nazývané *gravitačné pole*. Na hmotný bod hmotnosti m pôsobí v gravitačnom poli gravitačná sila $\mathbf{f}$, ktorá podľa Newtonovho gravitačného zákona je úmerná jeho hmotnosti. Podiel

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{f}}{m} \tag{1}$$

je preto nezávislý od hmotnosti do poľa vloženého bodu. Je to veličina (vektorovej povahy), ktorá len toto pole charakterizuje a nazýva sa *intenzita v gravitačnom poli*. Číselne sa rovná sile pôsobiacej v gravitačnom poli na hmotný bod jednotkovej hmotnosti.

Voľný hmotný bod pôsobením gravitačnej sily nadobúda vzhľadom na inerciálny systém zrýchlenie $\mathbf{a} = \mathbf{f}/m = \mathbf{E}$. *Intenzita v každom bode gravitačného poľa je teda totožná so zrýchlením, ktoré pole hmotnému bodu na tomto mieste udeľuje.*