voľne sa pohybujúcich v blízkosti povrchu Zeme platí približne $g = \varkappa \dfrac{M}{R^2}$, takže

$$M = \frac{gR^2}{\varkappa} = \frac{9{,}81 \,.\, (6{,}37 \,.\, 10^6)^2}{6{,}68 \,.\, 10^{-11}}\ \text{kg} = 5{,}98 \,.\, 10^{24}\ \text{kg}$$

Priemerná merná hmotnosť Zeme je teda

$$s = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \frac{3g}{4\pi\varkappa R} = \frac{3 \,.\, 9{,}81\ \text{kgm}^{-3}}{4\pi \,.\, 6{,}685 \,.\, 10^{-11} \,.\, 6{,}37 \,.\, 10^6} = 5{,}5\ \text{g/cm}^3$$

Hmotnosť M nebeského telesa s obežnicou môžeme určiť aj pomocou vzorca (9), ak v ňom za r dosadíme polomer kruhovej alebo aspoň približne kruhovej dráhy obežnice centrálneho telesa a zrýchlenie a obežnice určíme z obežnej doby: $a = \dfrac{v^2}{r} = \dfrac{4\pi^2 r}{T^2}$. Hmotnosť Zeme sme mohli teda počítať aj pomocou obežnej dráhy Mesiaca. Približnú hodnotu hmotnosti Slnka dostaneme, ak vo vzorci (9) zrýchlenie a vyjadríme pomocou hodnôt vyplývajúcich z obiehania Zeme okolo Slnka po približne kruhovej dráhe, teda z rovnice

$$\frac{4\pi^2 r}{T^2} = \varkappa \frac{M}{r^2}$$

Keďže v tomto prípade približne $r = 149 \,.\, 10^6$ km $= 149 \,.\, 10^9$ m a $T = 365$ dní 6 h $= 315 \,.\, 10^5$ s, pre hmotnosť Slnka vychádza $M = 1{,}98 \,.\, 10^{30}$ kg.

2.13. Intenzita a potenciál v gravitačnom poli. Na hmotný element kdekoľvek v okolí hmotných telies pôsobí gravitačná sila. Priestor v okolí hmotných telies je teda silové pole, nazývané *gravitačné pole*. Na hmotný bod hmotnosti m pôsobí v gravitačnom poli gravitačná sila $\mathbf{f}$, ktorá podľa Newtonovho gravitačného zákona je úmerná jeho hmotnosti. Podiel

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{f}}{m} \tag{1}$$

je preto nezávislý od hmotnosti do poľa vloženého bodu. Je to veličina (vektorovej povahy), ktorá len toto pole charakterizuje a nazýva sa *intenzita v gravitačnom poli*. Číselne sa rovná sile pôsobiacej v gravitačnom poli na hmotný bod jednotkovej hmotnosti.

Voľný hmotný bod pôsobením gravitačnej sily nadobúda vzhľadom na inerciálny systém zrýchlenie $\mathbf{a} = \mathbf{f}/m = \mathbf{E}$. *Intenzita v každom bode gravitačného poľa je teda totožná so zrýchlením, ktoré pole hmotnému bodu na tomto mieste udeľuje.*

Poznámka. Intenzita silového zemského poľa, definovaná v čl. 2.3 ako podiel tiaže telesa a jeho hmotnosti, v dôsledku toho, že pohyb Zeme nie je rovnomerná translácia, iba približne sa rovná intenzite jej gravitačného poľa. K veci sa ešte vrátime v čl. 2.15.

Podľa vzorca (2.12.11b) hmotný bod s hmotnosťou M vytvára v svojom okolí gravitačné pole s intenzitou

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{f}}{m} = -\varkappa \frac{M}{r^3} \mathbf{r} \tag{2}$$

kde $\mathbf{r}$ je polohový vektor bodu, v ktorom intenzita poľa je $\mathbf{E}$, vzhľadom na miesto zdroja poľa, t. j. na polohu bodu s hmotnosťou M.

V okolí väčšieho počtu hmotných bodov intenzita gravitačného poľa je zrejme

$$\mathbf{E} = \sum \mathbf{E}_i = -\varkappa \sum \frac{m_i}{r_i^3} \mathbf{r}_i \tag{3}$$

pričom význam vektorov $\mathbf{r}_i$, s absolútnymi hodnotami r_i, je zrejmý.

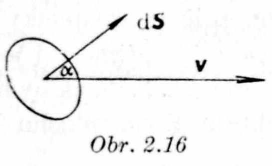
Pri spojitom rozložení hmoty je

$$\mathbf{E} = -\varkappa \int \frac{\varrho \, d\tau}{r^3} \mathbf{r} \tag{4}$$

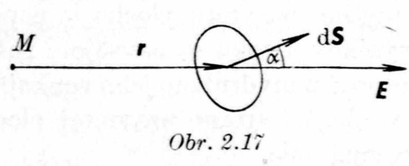
kde $d\tau$ značí diferenciál objemu a pri integrácii sa menia súradnice začiatku polohového vektora $\mathbf{r}$, od ktorých je závislá aj hustota ϱ.

Vypočítame tok vektora $\mathbf{E}$ z vnútra na vonkajšiu stranu ľubovoľnej uzavretej plochy, najprv v poli jediného hmotného bodu hmotnosti M, ktorý sa nachádza vo vnútri plochy.

Vo všeobecnosti tokom vektora $\mathbf{v}$ v ľubovoľnom vektorovom poli cez elementárnu plôšku s plošným obsahom dS, ktorej sme priradili plošný — na plôšku kolmý a na jednu alebo druhú stranu plôšky orientovaný — vektor $d\mathbf{S}$ *(obr. 2.16)*, nazývame skalárny súčin $dT = \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S} = v(\cos \alpha) \, dS$. Tok cez konečnú plochu je potom $T = \int \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S}$ a integrácia sa vzťahuje na celú plochu.



Obr. 2.16



Obr. 2.17

Tok intenzity v gravitačnom poli jedného hmotného bodu hmotnosti M cez elementárnu plôšku je teda *(obr. 2.17)*

$$dT = \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = -\varkappa M \frac{\mathbf{r} \cdot d\mathbf{S}}{r^3} = -\varkappa M \frac{\cos \alpha \, dS}{r^2}$$

Súčin $(\cos \alpha) \, dS$, ak uhol α je ostrý, je však absolútna hodnota plošného obsahu projekcie plôšky dS do roviny na vektor $\mathbf{r}$ kolmej, ktorá — ak plôšku dS, a teda aj jej projekciu, vidíme z miesta hmotného bodu M pod priestorovým zorným uhlom $\mathrm{d}\omega$ — je tiež $r^2\,\mathrm{d}\omega$. Keby však uhol α bol tupý, bolo by zrejme $(\cos\alpha)\,\mathrm{d}S = -r^2\,\mathrm{d}\omega$. Je teda

$$\mathrm{d}T = \mp \varkappa M \frac{r^2\,\mathrm{d}\omega}{r^2} = \mp \varkappa M\,\mathrm{d}\omega$$

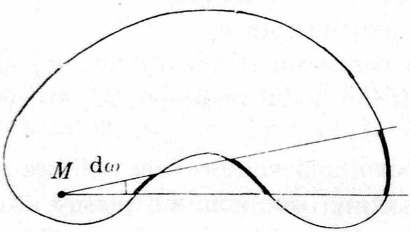
podľa toho, či z bodu M nevidíme alebo vidíme tú stranu plôšky $\mathrm{d}S$, na ktorú sme orientovali plošný vektor $\mathrm{d}\mathbf{S}$, čiže na ktorú tok počítame.

Tok (tok na vonkajšiu stranu) vektora $\mathbf{E}$ z uzavretej plochy, ktorá obklopuje hmotný bod hmoty M, je teda

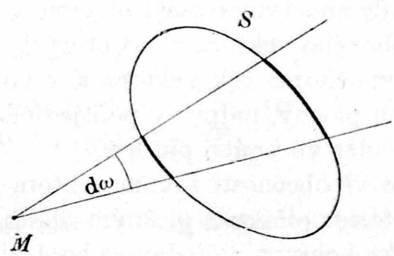
$$T = -\varkappa M \int \mathrm{d}\omega = -4\pi\varkappa M \tag{5}$$

lebo z miesta bodu M vidíme uzavretú plochu pod plným priestorovým uhlom 4π.

Výsledok (5) platí zrejme aj pre uzavretú plochu tvaru naznačeného na *obr. 2.18*, lebo elementárny priestorový uhol s vrcholom vo vnútri uzavretej



Obr. 2.18



Obr. 2.19

plochy pretína uzavretú plochu v nepárnom počte, pričom príspevky vždy dvoch výsekov k toku sa navzájom rušia, lebo z bodu M vidíme pri jednom jeho vnútornú a pri druhom jeho vonkajšiu stranu. Podľa *obr. 2.19*, ak by bod M bol na vonkajšej strane uzavretej plochy, tok vektora $\mathbf{E}$ cez plochu by sa zrejme rovnal nule.

Výtok vektora intenzity gravitačného poľa jedného hmotného bodu závisí teda len od toho, či sa bodový zdroj poľa nachádza vo vnútri alebo na vonkajšej strane uzavretej plochy; v prvom prípade je daný vzorcom (5), v druhom sa rovná nule.

Ak by vo vnútri uzavretej plochy bolo viac hmotných bodov s hmotnosťami M_i, výtok vektora $\mathbf{E}$ by bol

$$T = -4\pi\varkappa \sum M_i$$

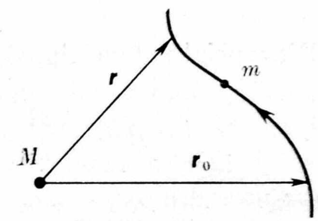
lebo intenzita výsledného gravitačného poľa sa rovná súčtu intenzít budených jednotlivými bodmi a integrál súčtu rovná sa súčtu integrálov.

Tok T vektora intenzity gravitačného poľa znútra na vonkajšiu stranu uzavretej plochy sa teda rovná $-4\pi\varkappa$-násobku celkovej hmoty M prítomnej vo vnútri plochy:

$$T = -4\pi\varkappa M \tag{6}$$

V gravitačnom poli hmotného bodu s hmotnosťou M počítajme myslenú prácu A potrebnú na prenesenie iného hmotného bodu s hmotnosťou m z miesta zvoleného za základ, ktorého polohový vektor vzhľadom na bod M je $\mathbf{r}_0$, na miesto s polohovým vektorom $\mathbf{r}$. Táto práca, práca sily, ktorá prekonáva gravitačnú silu, je

$$A = \int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} \mathbf{f} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = \int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} \varkappa \frac{Mm}{r^3} \mathbf{r} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = \varkappa Mm \int_{r_0}^{r} \frac{\mathrm{d}r}{r^2} = \varkappa Mm \left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r}\right)$$



Obr. 2.20

Podľa získaného výsledku práca A je od tvaru dráhy, ktorá spája bod s polohovým vektorom $\mathbf{r}_0$ *(obr. 2.20)* s bodom s polohovým vektorom $\mathbf{r}$, nezávislá. Ak ju prepočítame na jednotku hmotnosti prenášaného hmotného bodu, dostaneme skalárnu fyzikálnu veličinu, ktorá pri pevne zvolenom bode s polohovým vektorom $\mathbf{r}_0$ je funkciou len súradníc koncového bodu polohového vektora $\mathbf{r}$; nazýva sa *potenciál v gravitačnom poli* hmotného bodu s hmotnosťou M

$$V = \frac{A}{m} = \varkappa M \left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r}\right) \tag{7}$$

Keď na základné miesto zvolíme bod v nekonečne, zo vzorca (7) dostaneme vyjadrenie tzv. *absolútneho gravitačného potenciálu* v gravitačnom poli hmotného bodu s hmotnosťou M

$$V = -\varkappa \frac{M}{r} \tag{8}$$

V okolí sústavy n hmotných bodov absolútny gravitačný potenciál je

$$V = -\varkappa \sum \frac{m_i}{r_i} \tag{9}$$

a pri spojitom rozložení hmoty v priestore pri hustote ϱ

$$V = -\varkappa \int \frac{\varrho \, \mathrm{d}\tau}{r} \tag{10}$$