2.14. Vzťah medzi intenzitou a potenciálom v gravitačnom poli. V definícii gravitačného potenciálu $V = A/m$ vystupujúca práca A je práca sily $\mathbf{f}$, ktorá prekonáva gravitačnú silu, teda $\mathbf{f} = -m\mathbf{E}$, ak $\mathbf{E}$ je intenzita poľa. Podľa toho potenciál v ľubovoľnom gravitačnom poli vyjadrujú vzorce

$$V = \frac{A}{m} = \frac{1}{m}\int_{r_0}^{r} \mathbf{f} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = \int_{r_0}^{r} -\mathbf{E} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = \int_{r}^{r_0} \mathbf{E} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} \qquad (1)$$

Posledný z nich hovorí, že potenciál v gravitačnom poli sa rovná aj dráhovému integrálu intenzity gravitačného poľa počítanému pozdĺž čiary, ktorá spája daný bod gravitačného poľa s bodom zvoleným za základ, resp. pri absolútnom gravitačnom potenciáli, pozdĺž čiary, ktorá začína v danom bode gravitačného poľa a ide do nekonečna.

Zrejme je správny aj vzťah

$$\mathrm{d}V = -\mathbf{E} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r}$$

Diferenciál potenciálu, skalárnej funkcie polohy, je však aj

$$\mathrm{d}V = \frac{\partial V}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial V}{\partial y}\,\mathrm{d}y + \frac{\partial V}{\partial z}\,\mathrm{d}z = (\mathrm{grad}\ V) \cdot \mathrm{d}\mathbf{r}$$

teda

$$(\mathrm{grad}\ V) \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = -\mathbf{E} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r}$$

Pretože tento vzťah platí pre každé $\mathrm{d}\mathbf{r}$, je

$$\mathbf{E} = -\mathrm{grad}\ V \qquad (2)$$

Intenzita v gravitačnom poli sa rovná gradientu potenciálu s opačným znamienkom. Tento vzťah má veľkú praktickú dôležitosť, lebo umožňuje odvodiť intenzitu gravitačného poľa, ktorá je vektor, od potenciálu, ktorý je skalár, a priame počítanie veličín, ktoré sú skalármi, je omnoho jednoduchšie ako počítanie veličín povahy vektorovej.

Plochy, ktorých všetky body vykazujú ten istý potenciál, plochy s rovnakým potenciálom všetkých svojich bodov, nazývajú sa *ekvipotenciálnymi hladinami.* Gradient skalárnej funkcie polohy bodu udáva smer a absolútnu hodnotu najväčšieho stúpania tejto funkcie, a je teda na plochu s konštantnou funkčnou hodnotou vždy kolmý. Preto vzťah (2) hovorí aj to, že siločiary gravitačné, so smerom intenzity všade rovnobežné, pretínajú ekvipotenciálne hladiny všade kolmo.

Podľa vzorca (2.13.6) tok vektora intenzity gravitačného poľa znútra na vonkajšiu stranu uzavretej plochy S je

$$\oint \mathbf{E} \,.\, \mathrm{d}\mathbf{S} = -4\pi\varkappa M = -4\pi\varkappa \int \varrho \, \mathrm{d}\tau$$

ak ϱ značí hustotu hmoty vo vnútri plochy a $\mathrm{d}\tau$ diferenciál objemu. Podľa Gaussovej vety vektorového počtu plošný integrál na ľavej strane tejto rovnice možno nahradiť objemovým integrálom z div $\mathbf{E} = \nabla \,.\, \mathbf{E}$, počítaným cez vnútro uzavretej plochy, $\int \mathbf{E} \,.\, \mathrm{d}\mathbf{S} = \int (\mathrm{div}\, \mathbf{E})\, \mathrm{d}\tau = -\int (\mathrm{div}\,\mathrm{grad}\, V)\, \mathrm{d}\tau$. Správna je preto aj rovnica

$$-\int (\mathrm{div}\,\mathrm{grad}\, V)\, \mathrm{d}\tau = -4\pi\varkappa \int \varrho \, \mathrm{d}\tau$$

alebo, keďže oba integrály sa vzťahujú na ten istý objem,

$$\mathrm{div}\,\mathrm{grad}\, V = \nabla \,.\, \nabla V = \Delta V = 4\pi\varkappa\varrho$$

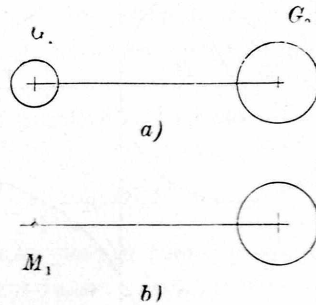
Rovnica

$$\Delta V = 4\pi\varkappa\varrho \tag{3}$$

je základnou diferenciálnou rovnicou gravitačného poľa.

Príklad 1. Vypočítame gravitačnú intenzitu a potenciál vo vnútri a v okolí rovnorodej hmotnej gule s polomerom R a hmotnosťou M. Zo súmernosti vyplýva, že intenzita $\mathbf{E}$ je všade rovnobežná s príslušným polomerom gule. Podľa vzorca (2.13.6) tok vektora $\mathbf{E}$ cez povrch myslenej gule, s guľou hmotnosti M sústrednej a s polomerom $r > R$, je $T = -4\pi\varkappa M$. Podľa definície tento tok je však $T = \int \mathbf{E} \,.\, \mathrm{d}\mathbf{S} = -\int E \, \mathrm{d}S$, alebo keďže absolútna hodnota intenzity $\mathbf{E}$ je vo všetkých bodoch gule s polomerom r rovnaká, $T = -4\pi E r^2$. Porovnaním obidvoch výsledkov dostávame pre $r > R$:

$$E = \varkappa \frac{M}{r^2} \tag{4}$$



Obr. 2.21

Homogénna hmotná guľa budí teda vo svojom okolí práve také gravitačné pole ako hmotný bod s rovnakou hmotnosťou, ktorý by bol v strede gule. Je to výsledok, ktorý sme už použili v čl. *2.12*.

V tejto súvislosti dokážeme ešte, že dve homogénne hmotné gule s ľubovoľnými polomermi účinkujú na seba silami ako dva hmotné body v ich stredoch. Nech je $\mathbf{f}_2$ sila, ktorou účinkuje guľa G_1 na guľu G_2 *(obr. 2.21a)*. Keďže silové pole gule G_1 môžeme v našom prípade nahradiť silovým poľom hmotného bodu M_1 s rovnakou hmotnosťou, silu $\mathbf{f}_2$ môžeme počítať podľa náhradnej schémy *(obr. 2.21b)*. Podľa tejto schémy počítaná sila $\mathbf{f}_2$ má však podľa princípu akcie a reakcie rovnakú absolútnu hodnotu ako sila, ktorou guľa G_2 účinkuje na hmotný bod M_1, a pri jej počítaní — ako už vieme — môžeme aj guľu G_2 nahradiť hmotným bodom s rovnakou hmotnosťou M_2 v jej strede. Skutočne teda $f_2 = \varkappa \dfrac{M_1 M_2}{r^2}$, ak r je vzájomná vzdialenosť stredov obidvoch gúľ.

Vrátime sa však k štúdiu gravitačného poľa jedinej hmotnej gule. Budeme počítať teraz intenzitu $\mathbf{E}$ vo vnútri gule. Aplikovaním vzorca (2.13.6) na myslenú guľu s polomerom $r < R$ dostávame rovnicu

$$-4\pi r^2 E = -4\pi\varkappa \cdot \frac{4}{3}\pi r^3 \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3}$$

podľa ktorej je pre $r < R$

$$E = \varkappa \frac{Mr}{R^3} \tag{5}$$

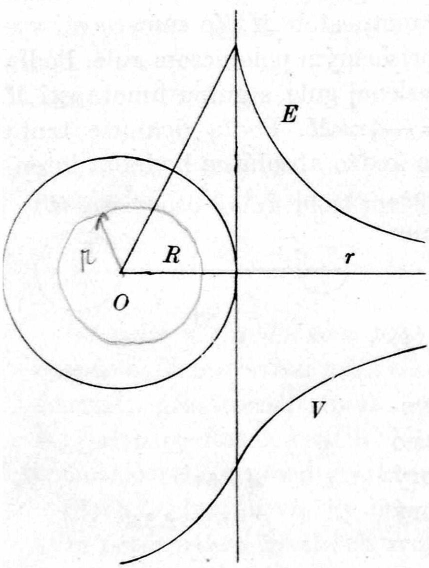
V okolí homogénnej hmotnej gule je gravitačné pole rovnaké ako v okolí hmotného bodu. Preto v okolí aj na povrchu našej gule je potenciál (vzhľadom na nekonečno) daný vzorcom (2.13.8)

$$V = -\varkappa \frac{M}{r}$$

Potenciál vo vnútri gule nájdeme podľa jeho definície ako prácu pri prenášaní hmotnostnej jednotky z miesta vzťažného na miesto, v ktorom potenciál práve hľadáme. Ak si za vzťažné miesto zvolíme stred gule, bude $V_s = -\int_0^r \mathbf{E} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r}$, a teda potenciál vzhľadom na nekonečno

$$V = V_s + C = -\int_0^r \mathbf{E} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} + C = \int_0^r E \,\mathrm{d}r + C$$

lebo vektory $\mathbf{E}$ a $\mathrm{d}\mathbf{r}$ sú nesúhlasne rovnobežné. Potenciál V, keďže intenzitu vo vnútri gule už poznáme, je teda



Obr. 2.22

$$V = \int_0^r \varkappa \frac{Mr}{R^3} \mathrm{d}r + C = \varkappa \frac{Mr^2}{2R^3} + C$$

Konštantu C nájdeme z podmienky, že na povrchu gule je potenciál $V(R) = -\varkappa \frac{M}{R}$, takže

$V - \varkappa \frac{Mr^2}{2R^3} = C$

$$C = -\varkappa \frac{M}{R} - \varkappa \frac{M}{2R} = -\varkappa \frac{3M}{2R}$$

Potenciál vo vnútri gule je teda $(r < R)$

$$V = \varkappa \frac{M}{2} \left(\frac{r^2}{R^3} - \frac{3}{R} \right)$$

Závislosť absolútnej hodnoty intenzity a potenciálu od vzdialenosti od stredu gule znázorňuje *obr. 2.22.*

Majme na mysli gravitačné pole hmotných telies, ktoré sú vo zvolenom inerciálnom súradnicovom systéme pre nejaké príčiny v pokoji. Keď sa v tomto hmotný bod s hmotnosťou m presunie z miesta s polohovým vektorom $\mathbf{r}$ na miesto zvolené za základ s polohovým vektorom $\mathbf{r}_0$, gravitačné sily vykonajú prácu

$$U = \int_{r}^{r_0} m\mathbf{E} \,.\, d\mathbf{r} = m \int_{r}^{r_0} \mathbf{E} \,.\, d\mathbf{r} = mV \tag{6}$$

Schopnosť vykonať prácu sa vo fyzike vyjadruje všeobecne slovom *energia* a meria sa práve touto prácou. Ako sme sa práve presvedčili, schopnosť gravitačného poľa vykonať prácu závisí od polohy hmotného bodu vloženého do poľa, ako aj od jeho polohy, ktorá bola zvolená za základnú. Nazýva sa preto *polohová* alebo aj *potenciálna energia* a z praktických príčin, ktoré rozoberieme až v čl. 3.4, prisudzuje sa niekedy celá hmotnému bodu, ktorý sa v gravitačnom poli nachádza a je určená vzorcom (6).

Podľa vzorcov (2.13.1) a (2.14.2) sila pôsobiaca na hmotný bod s hmotnosťou m v gravitačnom poli je

$$\mathbf{f} = m\mathbf{E} = -m \operatorname{grad} V = -\operatorname{grad} (mV) = -\operatorname{grad} U \tag{7}$$

Slovami: *Sila pôsobiaca na hmotný bod v gravitačnom poli sa rovná gradientu jeho polohovej energie v tomto poli vzatému s opačným znamienkom.*

Z pojmu polohovej energie hmotného bodu v gravitačnom poli bezprostredne vyplýva, že práca gravitačných síl pri prechode hmotného bodu s hmotnosťou m z miesta s polohovým vektorom $\mathbf{r}_1$ na miesto s polohovým vektorom $\mathbf{r}_2$ je $A_{12} = U_1 - U_2$. Podľa vzorca (2.10.3) táto práca pri voľnom pohybe hmotného bodu je $A_{12} = K_2 - K_1$. Z porovnania obidvoch vzťahov vyplýva $K_2 - K_1 = U_1 - U_2$ alebo

$$U_1 + K_1 = U_2 + K_2 = \text{const} \tag{8}$$

Rovnica (8) vyjadruje *zákon o zachovaní súčtu polohovej (potenciálnej) a pohybovej (kinetickej) energie* hmotného bodu pri jeho voľnom pohybe v gravitačnom poli hmotných telies ktoré sú v inerciálnom systéme v pokoji. Prenechávame čitateľom dôkaz platnosti tohto zákona aj pre pohyb tuhého telesa v takomto poli.

Na tomto mieste zdôrazníme už len, že zákon o zachovaní (konzervácii) energie vyjadrený rovnicou (8) je dôsledok toho, že hmotný bod sa v gravitačnom poli vyznačuje svojou polohovou energiou, t. j. veličinou závislou len od jeho polohy. Polia a silové sústavy týchto vlastností sa všeobecne nazývajú *konzervatívne*.

2.15. Pohyb hmotného bodu v silovom poli zemskom. Pri pohybe voľného hmotného bodu v silovom poli zemskom účinkuje na hmotný bod gravitačná sila $\mathbf{f}_g$, ktorá sa rovná súčinu intenzity gravitačného poľa zemského $\mathbf{E}$ a hmotnosti pohybujúceho sa hmotného bodu m, $\mathbf{f}_g = m\mathbf{E}$. Podľa Newtonovho zákona sily udeľuje táto sila pohybujúcemu sa hmotnému bodu vzhľadom na inerciálny systém zrýchlenia $\mathbf{a} = \dfrac{\mathbf{f}_g}{m} = \mathbf{E}$. Pretože Zem sa otáča okolo svojej vlastnej osi uhlovou rýchlosťou ω a okrem toho obieha okolo Slnka, zrýchlenie vzhľadom na Zem, aj keď neprizeráme na odpor vzduchu, je iné. Pre pohyb vzhľadom na povrch zemský Newtonov princíp zotrvačnosti neplatí. Priestor Zeme nie je inerciálny. Podľa rovnice (1.11.4) zrýchlenie na Zemi pozorované je

$$\mathbf{a}' = \mathbf{a} - \mathbf{a}_0 + (\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}')\times\boldsymbol{\omega} - 2\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{v}' - \boldsymbol{\epsilon}\times\mathbf{r}'$$

kde $\mathbf{a} = \mathbf{E}$ je zrýchlenie vzhľadom na stálice, $\mathbf{a}_0$ zrýchlenie stredu Zeme, $\boldsymbol{\omega}$ uhlová rýchlosť otáčania Zeme okolo jej osi, $\mathbf{r}'$ polohový vektor pohybujúceho sa hmotného bodu vzhľadom na stred Zeme a $\mathbf{v}'$ jeho rýchlosť vzhľadom na Zem. Keď v poslednej rovnici zrýchlenie $\mathbf{a}_0$ zanedbáme, t. j. odhliadneme od skutočnosti, že stred Zeme sa nepohybuje stálou rýchlosťou po priamke, ale obieha po elipse okolo Slnka, a okrem toho aj posledný člen, lebo uhlové zrýchlenie $\boldsymbol{\epsilon}$ je zanedbateľne malé, dostaneme

$$\mathbf{a}' = \mathbf{a} + (\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}')\times\boldsymbol{\omega} - 2\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{v}' = \mathbf{E} + (\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}')\times\boldsymbol{\omega} - 2(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{v}') \qquad (1)$$

Vynásobením poslednej rovnice hmotou m vychádza

$$m\mathbf{a}' = m\mathbf{E} + m(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}')\times\boldsymbol{\omega} - 2m(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{v}') = \mathbf{f}_g + \mathbf{f}_0 + \mathbf{f}_c \qquad (2)$$

Ak chceme zachovať platnosť Newtonovho zákona sily, napísaného v tvare $\mathbf{f} = m\mathbf{a}$, aj pre pohyb vzhľadom na povrch zemský, musíme sa postaviť na stanovisko, že na telesá v priestore Zeme okrem gravitačnej sily $\mathbf{f}_g$ účinkuje