

Rovnica (8) vyjadruje zákon o zachovaní súčtu polohovej (potenciálnej) a pohybovej (kinetickej) energie hmotného bodu pri jeho voľnom pohybe v gravitačnom poli hmotných telies ktoré sú v inerciálnom systéme v pokoji. Pre nechávame čitateľom dôkaz platnosti tohto zákona aj pre pohyb tuhého telesa v takomto poli.

Na tomto mieste zdôrazníme už len, že zákon o zachovaní (konzervácii) energie vyjadrený rovnicou (8) je dôsledok toho, že hmotný bod sa v gravitačnom poli vyznačuje svojou polohovou energiou, t. j. veličinou závislou len od jeho polohy. Polia a silové sústavy týchto vlastností sa všeobecne nazývajú konzervatívne.

2.15. Pohyb hmotného bodu v silovom poli zemskom. Pri pohybe voľného hmotného bodu v silovom poli zemskom účinkuje na hmotný bod gravitačná sila $\mathbf{f}_g$, ktorá sa rovná súčinu intenzity gravitačného poľa zemského $\mathbf{E}$ a hmotnosti pohybujúceho sa hmotného bodu m , $\mathbf{f}_g = m\mathbf{E}$. Podľa Newtonovho zákona sily udeľuje táto sila pohybujúcemu sa hmotnému bodu vzhľadom na inerciálny

systém zrýchlenia $\mathbf{a} = \frac{\mathbf{f}_g}{m} = \mathbf{E}$. Pretože Zem sa otáča okolo svojej vlastnej osi uhlovou rýchlosťou ω a okrem toho obieha okolo Slnka, zrýchlenie vzhľadom na Zem, aj keď neprizeráme na odpor vzduchu, je iné. Pre pohyb vzhľadom na povrch zemský Newtonov princíp zotrvačnosti neplatí. Priestor Zeme nie je inerciálny. Podľa rovnice (1.11.4) zrýchlenie na Zemi pozorované je

$$\mathbf{a}' = \mathbf{a} - \mathbf{a}_0 + (\omega \times \mathbf{r}') \times \omega - 2\omega \times \mathbf{v}' - \epsilon \times \mathbf{r}'$$

kde $\mathbf{a} = \mathbf{E}$ je zrýchlenie vzhľadom na stálice, $\mathbf{a}_0$ zrýchlenie stredu Zeme, ω uhlová rýchlosť otáčania Zeme okolo jej osi, $\mathbf{r}'$ polohový vektor pohybujúceho sa hmotného bodu vzhľadom na stred Zeme a $\mathbf{v}'$ jeho rýchlosť vzhľadom na Zem. Keď v poslednej rovnici zrýchlenie $\mathbf{a}_0$ zanedbáme, t. j. odhliadneme od skutočnosti, že stred Zeme sa nepohybuje stálou rýchlosťou po priamke, ale obieha po elipse okolo Slnka, a okrem toho aj posledný člen, lebo uhlové zrýchlenie ϵ je zanedbateľne malé, dostaneme

$$\mathbf{a}' = \mathbf{a} + (\omega \times \mathbf{r}') \times \omega - 2\omega \times \mathbf{v}' = \mathbf{E} + (\omega \times \mathbf{r}') \times \omega - 2(\omega \times \mathbf{v}') \quad (1)$$

Vynásobením poslednej rovnice hmotou m vychádza

$$m\mathbf{a}' = m\mathbf{E} + m(\omega \times \mathbf{r}') \times \omega - 2m(\omega \times \mathbf{v}') = \mathbf{f}_g + \mathbf{f}_0 + \mathbf{f}_c \quad (2)$$

Ak chceme zachovať platnosť Newtonovho zákona sily, napísaného v tvare $\mathbf{f} = m\mathbf{a}$, aj pre pohyb vzhľadom na povrch zemský, musíme sa postaviť na stanovisko, že na telesá v priestore Zeme okrem gravitačnej sily $\mathbf{f}_g$ účinkuje

ešte *odstredivá sila* $\mathbf{f}_0 = m(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}') \times \boldsymbol{\omega}$ a *Coriolisova sila* $\mathbf{f}_c = -2m(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}')$. Tieto sily nie sú však skutočné, ich príčinou je otáčanie sa Zeme okolo osi a sú prejavom zotrvačnosti hmoty.

Poznámka. Podľa vzorca (1) pri pohybe hmotného bodu vzhľadom na Zem v jeho mieste pôsobí d'Alembertova sila je

$$\mathbf{f}_a = -m\mathbf{a} = -m\mathbf{a}' + m(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}') \times \boldsymbol{\omega} - 2m(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}')$$

Podľa tohto veľmi poučného výsledku odstredivá sila a Coriolisova sila sú dve z troch zložiek d'Alembertovej zotrvačnej sily, ktorej tretou zložkou je sila $-m\mathbf{a}'$.

Posledný člen v rovnici (2), Coriolisova sila

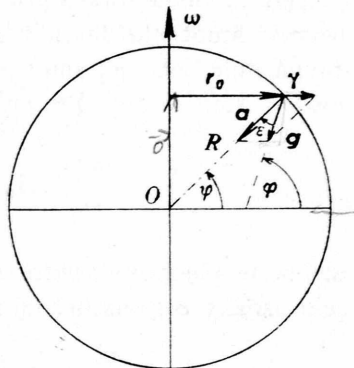
$$\mathbf{f}_c = -2m(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}') \quad (3)$$

má hodnotu rôznu od nuly, len ak jestvuje pohyb relatívny, najväčšiu, ak smer relatívnej rýchlosti je na zemskú os kolmý. Za relatívneho pokoja (alebo ak $\mathbf{v}' \parallel \boldsymbol{\omega}$) sa rovná nule a pri malých rýchlostiach ho môžeme vzhľadom na ostatné členy v rovnici (2) zanedbať. Súčet zostávajúcich dvoch členov, gravitačnej sily $\mathbf{f}_g = m\mathbf{E}$ a sily odstredivej

$$\mathbf{f}_0 = m(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}') \times \boldsymbol{\omega} = m\omega^2 \mathbf{r}_0 \quad (4)$$

má na tom istom mieste vzhľadom na zemský povrch stálu hodnotu. Je to tiaž hmotného bodu na tomto mieste, ktorá vyvoláva zrýchlenie $\mathbf{g} = \mathbf{a} + \omega^2 \mathbf{r}_0$. Toto zrýchlenie, totožné so zrýchlením na začiatku voľného padania telies na zemský povrch (vo vákuu), volá sa zrýchlenie voľného pádu. Jeho závislosť od zemepisnej šírky vyplýva z obr. 2.23.

Označme odstredivé zrýchlenie $\boldsymbol{\gamma}$, a zrýchlenia $\mathbf{a}$ a $\mathbf{g}$ nech zvierajú spolu uhol ε . Potom $g = a \cos \varepsilon - \gamma \cos \varphi$, kde φ je zemepisná šírka pozorovacieho miesta, uhol zovretý fyzikálnym smerom zvislým, určeným skutočne pozorovaným zrýchlením $\mathbf{g}$, a rovinou rovníka zemského. Uhol ε , určujúci rozdiel šírky geografickej a geocentrickej, má hodnotu vyplývajúcu z úmery $g : \gamma = \sin \varphi : \sin \varepsilon$. Za predpokladu, že Zem má tvar gule, uhol ε je najväčší na 45. rovnobežke ($5'56''$). Pre túto jeho veľmi malú hodnotu môžeme písať: $\cos \varepsilon = 1$ a s týmto zjednodušením



Obr. 2.23

$$g = a - \gamma \cos \varphi = a - \omega^2 r_0 \cdot \cos \varphi = a - \omega^2 R \cdot \cos \varphi \cdot \cos \varphi \doteq a - \omega^2 R \cdot \cos^2 \varphi$$

Na rovníku je skutočné zrýchlenie $g_0 = a - \omega^2 R$, teda $a = g_0 + \omega^2 R$. Dosađením do predchádzajúceho výrazu dostávame

$$\begin{aligned} g &= g_0 + \omega^2 R \cdot (1 - \cos^2 \varphi) = g_0 + \omega^2 R \cdot \sin^2 \varphi = \\ &= g_0 \left(1 + \frac{\omega^2 R}{g_0} \cdot \sin^2 \varphi \right) = g_0 (1 + \alpha \sin^2 \varphi) \end{aligned} \quad (5)$$

kde

$$\alpha = \frac{\omega^2 R}{g_0} = 0,00346$$

V čl. 2.14 sme odvodili platnosť zákona o zachovaní súčtu polohovej a pohybovej energie hmotného bodu pri jeho pohybe v gravitačnom poli telies, ktoré sú v nejakom inerciálnom systéme v pokoji. Na tomto mieste dokážeme, že tento zákon je splnený aj pri pohybe hmotného bodu v silovom zemskom poli.

V tomto poli pôsobí na hmotný bod gravitačná, odstredivá a Coriolisova sila. Ich spoločná práca sa rovná zväčšeniu $K_2 - K_1$ kinetickej energie hmotného bodu, ktorého hmotnosť nech je m .

Ako už vieme, práca gravitačnej sily sa rovná úbytku $U_{1g} - U_{2g}$ polohovej energie hmotného bodu v gravitačnom poli Zeme. Práca Coriolisovej sily sa rovná nule, lebo jej smer je na smer pohybu bodu, totožný so smerom rýchlosti $\mathbf{v}'$, stále kolmý. Pre prácu odstredivej sily pri použití vzorca (4) dostaneme

$$A_0 = \int_{r_1}^{r_2} \mathbf{f}_0 \cdot d\mathbf{r} = \int_{r_1}^{r_2} m\omega^2 \mathbf{r}_0 \cdot d\mathbf{r}$$

alebo, ak polohový vektor $\mathbf{r}$ vzťahujúci sa na stred Zeme napíšeme ako súčet jeho zložky $\bullet$ rovnobežnej so zemskou osou a vektora $\mathbf{r}_0$

$$\begin{aligned} A_0 &= \int_{r_{01}}^{r_{02}} m\omega^2 \mathbf{r}_0 \cdot (d\bullet + d\mathbf{r}_0) = \frac{1}{2} m\omega^2 r_{02}^2 - \frac{1}{2} m\omega^2 r_{01}^2 = \\ &= -\frac{1}{2} m\omega^2 r_{01}^2 - \left(-\frac{1}{2} m\omega^2 r_{02}^2 \right) = U_{10} - U_{20} \end{aligned}$$

kde napr. $U_{10} = -\frac{1}{2} m\omega^2 r_{10}^2$ má zrejme význam polohovej energie hmotného bodu s hmotnosťou m v poli odstredivej sily $\mathbf{f}_0$ v mieste vo vzdialenosti r_{10} od zemskej osi vzhľadom na túto. Je teda

$$K_2 - K_1 = U_{1g} - U_{2g} + U_{10} - U_{20}$$

alebo

$$U_{1g} + U_{10} + K_1 = U_{2g} + U_{20} + K_2 = \text{const}$$

Vzorec (5) bol odvodený za predpokladu, že Zem má tvar gule, v ktorej je hmota rovnomerne rozložená. Avšak v dávnych časoch, keď ešte bola tvarovateľná, za účinku odstredivej sily Zem nadobudla tvar, pri ktorom jej povrch je na smer zrýchlenia voľného pádu všade kolmý. Má tvar približne rotačného elipsoidu, ktorého os leží v zemskej osi a má dĺžku $b = 6356,9$ km, zatiaľ čo rovníkový polomer je dlhší, $a = 6378,4$ km. Sploštenie Zeme spôsobuje, že i na nehybnej Zemi by bolo zrýchlenie na rovníku menšie ako na pólach. Preto absolútna hodnota zrýchlenia zväčšuje sa s rastúcou zemepisnou šírkou rýchlejšie než podľa vzorca (5).

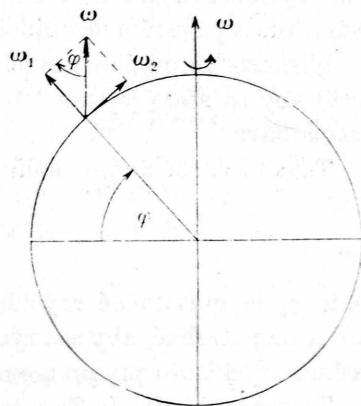
Coriolisova sila $-2m(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}')$ spôsobuje, že napríklad telesá pohybujúce sa na vodorovnej rovine nezachovávajú smer svojho pohybu. Ten sa na severnej polguli stáča vpravo, na južnej polguli vľavo (pasátne vetry, rieky vymieľajú na severnej polguli viac svoje pravé brehy). Coriolisova sila spôsobuje i to, že — okrem na pólach — nepadajú telesá zvisle na Zem, ale sa od zvislého smeru odchyľujú na východ.

Coriolisova sila prejavuje sa aj tým, že rovina matematického kyvadla na severnej polguli sa vzhľadom na smer okamžitého pohybu kyvadla stáča vždy vpravo, teda v zmysle pohybu hodinových ručičiek. Tento pokus vykonal prvý raz Foucault r. 1851 v parížskom Pantheon. Rýchlosť stáčania odvodíme touto názornou úvahou:

Uhlovú rýchlosť otáčania Zeme $\boldsymbol{\omega}$ (obr. 2.24) rozložíme na zložku $\boldsymbol{\omega}_1$, na povrch zemský kolmú, a $\boldsymbol{\omega}_2$, spadajúcu do roviny vodorovnej. Coriolisova sila sa tým rozloží tiež na dve zložky

$$-2m(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}') = -2m\boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{v}' - 2m\boldsymbol{\omega}_2 \times \mathbf{v}'$$

Druhá zložka, $-2m\boldsymbol{\omega}_2 \times \mathbf{v}'$, na vodorovnú rovinu kolmá, ruší sa pevnosťou závesu. Prvá zložka rýchlosti $\boldsymbol{\omega}_1$ značí, že sa povrch zemský pod kyvadlom, pri pozorovaní zhora, na severnej polguli otáča v zmysle proti pohybu hodinových ručičiek, takže rovina kyvov sa otáča vzhľadom na povrch zemský uhlovou rýchlosťou



Obr. 2.24

$$\omega_1 = \omega \sin \varphi \quad (6)$$

kde φ je zemepisná šírka. Za hodinu sa rovina kyvu matematického kyvadla otočí na pólach asi o 15° (za 1 hviezdnu hodinu presne o $15^\circ = 360^\circ : 24$), v Bratislave asi o $11^\circ 18'$.

Pohyb vzhľadom na Zem je veľmi významným prípadom pohybu vzhľadom na neinerciálny systém. Ale pretože rotačná rýchlosť Zeme je pomerne malá, Coriolisovu silu možno najčastejšie zanedbať, a odstredivá sila, ktorá v porovnaní s gravitačnou silou je tiež malá a okrem toho sa veľmi málo mení so zemepisnou polohou, je zahrnutá už v tiaži telies. V praxi preto rovnováhu a pohyb vzhľadom na Zem možno najčastejšie študovať a riešiť ako deje odohrávajúce sa v inerciálnom systéme, v ktorom na telesá účinkujú len ich prakticky konštantné tiaže.

Príklad 1. Vypočítame Coriolisovu silu účinkujúcu na lokomotívu tiaže 30 ton, ktorá sa na 30. rovnobežke pohybuje rýchlosťou 50 km/h na trati rovnobežnej s poludníkom. Absolútna hodnota tejto sily je približne

$$P = 2 |m\omega \times \mathbf{v}'| = 2m\omega v' \sin 30^\circ = \frac{6 \cdot 10^4 \cdot 2\pi \cdot 5 \cdot 10^4}{24 \cdot 3600 \cdot 3600} \text{ newton} =$$

$$= \frac{6\pi \cdot 10^9}{24 \cdot 36^2 \cdot 10^4 \cdot 9,81} \text{ kp} = 6,2 \text{ kp}$$

Príklad 2. Vypočítame tzv. *prvú a druhú kozmickú rýchlosť*. Prvou kozmickou rýchlosťou sa rozumie začiatočná rýchlosť telesa (vzhľadom na inerciálny súradnicový systém sledujúci pohyb stredu Zeme) pri jeho vodorovnom vrhu, v blízkosti zemského povrchu, potrebná, aby teleso už nedopadlo na Zem, čiže aby sa stalo jej umelou družicou, za predpokladu, že sa odpor vzduchu zanedbáva.

Táto rýchlosť zrejšuje rovnicu

$$\frac{v_1^2}{R} = g_0 \quad (\text{a})$$

kde g_0 je gravitačné zrýchlenie pri zemskom povrchu a R polomer Zeme. Je totiž potrebné, aby sa zrýchlenie g_0 v tomto prípade práve rovnalo dostredivému zrýchleniu pri rovnomernom kruhovom pohybe.

Za predpokladu, že Zem je presná guľa, zemský polomer môžeme vypočítat zo známej dĺžky zemského kvadrantu $d = 10 \cdot 10^6$ m. Potom $2\pi R = 4d$, alebo $R = 2d/\pi$. Zo vzorca (a) takto dostávame

$$v_1 = \sqrt{Rg_0} = \sqrt{2dg_0/\pi} = \sqrt{(20 \cdot 10^6 \cdot 9,80) : 3,14} = 7,912 \text{ km/s}$$

Keby sme vodorovnú rýchlosť udeľovali telesu vo výške h nad zemským povrchom, na vytvorenie umelej družice Zeme by bola potrebná začiatočná rýchlosť určená rovnicou

$$\frac{v_1'^2}{R + h} = g \quad (\text{b})$$

kde g je gravitačné zrýchlenie vo výške h nad zemským povrchom. Pretože zrýchlenie g , práve tak ako gravitačná sila, je nepriamo úmerné druhej mocnine vzdialenosti od stredu Zeme, je $g = g_0 \frac{R^2}{(R+h)^2}$. Dosadením tohto vyjadrenia zrýchlenia g do vzorca (b) dostávame rovnicu

$$\frac{v_1'^2}{R+h} = g_0 \frac{R^2}{(R+h)^2}$$

takže je $v_1'^2 = g_0 R \frac{R}{R+h}$, alebo

$$v_1' = \sqrt{g_0 R} \sqrt{\frac{R}{R+h}} = v_1 \sqrt{\frac{R}{R+h}} \quad (c)$$

Prvá kozmická rýchlosť s výškou nad zemským povrchom sa teda znižuje. K veci treba ešte poznamenať, že zatiaľ čo rýchlosť $v_1 = 7.912$ km/s pre veľký odpor vzduchu v blízkosti zemského povrchu má význam len teoretický, vzorec (c), keď výška h je niekoľko sto km nad zemským povrchom, už veľmi presne vyjadruje začiatočnú rýchlosť v tejto výške, potrebnú na vytvorenie umelej družice Zeme s kruhovou dráhou.

Druhá kozmická rýchlosť bola definovaná ako začiatočná rýchlosť (vzhľadom na inerciálny systém so začiatkom v ťažisku slnečnej sústavy), s ktorou, ak nejaké teleso sa začne vzdalovať od Zeme, vymaní sa z jej gravitačného poľa, t. j. práve až v nekonečno je jeho kinetická energia rovná nule. Druhá kozmická rýchlosť vyplýva teda z podmienky $U + K = 0$, kde U značí potenciálnu energiu telesa vzhľadom na nekonečno a K energiu kinetickú. Vyjadrením týchto energií dostávame pre druhú kozmickú rýchlosť rovnicu

$$-\kappa \frac{Mm}{R} + \frac{1}{2} m v_2^2 = 0$$

Pre druhú kozmickú rýchlosť z nej dostávame vyjadrenie

$$v_2 = \sqrt{\frac{2\kappa M}{R}} \quad (d)$$

kde κ je gravitačná konštanta, M hmota Zeme a R jej polomer.

Súčin κM môžeme vypočítať z gravitačného zrýchlenia pri zemskom povrchu, $g_0 = \kappa \frac{M}{R^2}$, takže je $\kappa M = g_0 R^2$. Dosadením týchto výsledkov do vzorca (d) vychádza

$$v_2 = \sqrt{2g_0 R} = 11,2 \text{ km/s}$$