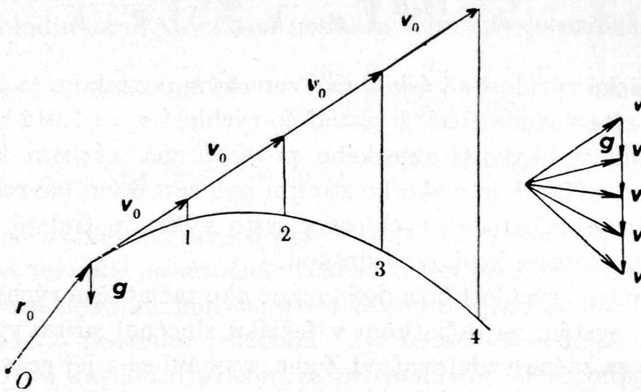
2.16. Pohyb za účinku stálej sily, voľný pád a šikmý vrh. V tomto a nasledujúcich článkoch sa budeme zaoberať vyšetrovaním pohybov hmotného bodu (malého telesa, alebo telesa schopného konať len translačný pohyb) za pôsobenia konštantných síl alebo síl jednoducho závislých od polohy pohybujúceho sa bodu, pričom budeme predpokladať, že pohyb je sledovaný vzhľadom na inerciálny súradnicový systém. Podľa úvah vykonaných v predchádzajúcom článku pohyb bodu v silovom poli zemskom, vo vzduchoprázdnom priestore, pokiaľ jeho rýchlosť nie je veľká, môžeme po zanedbaní Coriolisovej sily považovať za pohyb odohrávajúci sa len účinkom jeho tiaže, sily rovnajúcej sa súčtu gravitačnej a odstredivej sily.



Obr. 2.25

Za účinku tejto stálej sily pohybuje sa hmotný bod so stálym zrýchlením $\mathbf{g}$. Priebeh pohybu vyjadruje teda vzorec odvodený v úlohe 1.2.3 na str. 36.

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}_0\, t + \frac{1}{2}\, \mathbf{g} t^2 \tag{1}$$

alebo, keď miesto začiatku pohybu zvolíme za vzťažné miesto,

$$\mathbf{r} = \mathbf{v}_0 t + \frac{1}{2}\, \mathbf{g} t^2 \tag{2}$$

Rýchlosť je

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{g} t \tag{3}$$

Dráha pohybu je parabola, vyjadrená rovnicou (1) vo vektorovom tvare *(obr. 2.25).*

Keď začiatočná rýchlosť $\mathbf{v}_0$ nemá nijaký význačný smer, volá sa pohyb *šikmý vrh*, keď má smer zvislý, je pohyb *zvislý vrh*. V prípade, že hmotný bod bol len pustený, nastáva jeho *voľný pád*.

A. Šikmý vrh. Položme začiatok pravouhlej súradnicovej sústavy do začiatku pohybu a začiatočná rýchlosť $\mathbf{v}_0$ nech leží v zvislej rovine XY. Smer začiatočnej rýchlosti $\mathbf{v}_0$ nech zviera s kladným smerom osi X výstupný uhol α. Os Y nech smeruje od povrchu zemského. Z rovníc (2) a (3) potom vyplýva

$$\begin{aligned} x &= v_0(\cos\alpha)\,t, & v_x &= v_0\cos\alpha \\ y &= v_0(\sin\alpha)\,t - \frac{1}{2}gt^2, & v_y &= v_0\sin\alpha - gt \\ z &= 0, & v_z &= 0 \end{aligned} \tag{4}$$

lebo vektor $\mathbf{g}$ je s osou Y nesúhlasne rovnobežný.

Rovnicu dráhy pohybu dostaneme v pravouhlých súradniciach eliminovaním času z prvých dvoch rovníc (4). Z prvej rovnice vyplýva

$$t = \frac{x}{v_0\cos\alpha}$$

čo dosadené do rovnice druhej dáva

$$y = v_0(\sin\alpha)\frac{x}{v_0\cos\alpha} - \frac{1}{2}g\frac{x^2}{v_0^2\cos^2\alpha} = x\,\mathrm{tg}\,\alpha - x^2\frac{g}{2v_0^2\cos^2\alpha} = ax - bx^2$$

teda rovnicu paraboly, s osou rovnobežnou s osou Y. Jej vrchol má súradnice x_0 a y_0

$$x_0 = \frac{v_0^2}{2g}\sin 2\alpha, \qquad y_0 = \frac{v_0^2}{2g}\sin^2\alpha$$

Na vodorovnú rovinu, prechádzajúcu miestom začiatku pohybu, napr. miestom výstrelu, dopadne hmotný bod vo vzdialenosti $x > 0$, ktorá vyplýva z rovnice $y = 0$, t. j.

$$x\,\mathrm{tg}\,\alpha - x^2\frac{g}{2v_0^2\cos^2\alpha} = 0$$

$$x = \frac{\mathrm{tg}\,\alpha}{g}\,.\,2v_0^2\cos^2\alpha = \frac{v_0^2\sin 2\alpha}{g} \tag{5}$$

Táto vzdialenosť je najväčšia pre $2\alpha = 90°$, t. j. pre $\alpha = 45°$ a dosiahne sa za čas $t = \dfrac{x}{v_0\cos\alpha} = \dfrac{v_0^2}{g}\,\dfrac{2\sin\alpha\,.\cos\alpha}{v_0\cos\alpha} = \dfrac{2v_0}{g}\sin\alpha$. Pri výstupných uhloch $45° + \varepsilon$ a $45° - \varepsilon$ je dostrel rovnaký, pretože $\sin 2(45° + \varepsilon) = \sin 2(45° - \varepsilon)$.

Výšku h, ktorá sa pri určitom výstupnom uhle dosiahne, udáva y-ová súradnica vrcholu paraboly, teda

$$h = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g} \tag{6}$$

B. Zvislý vrh. Pre zvislý vrh platia rovnice:

$$\begin{aligned} y &= v_0 t - \frac{1}{2} g t^2, \quad & x &= 0, \quad & z &= 0 \\ v_y &= v_0 - g t, & v_x &= 0, & v_z &= 0 \end{aligned} \tag{7}$$

v ktorých začiatočná rýchlosť v_0 môže byť aj záporná.

C. Vodorovný vrh. Pri vodorovnom vrhu platia vzťahy:

$$\begin{aligned} x &= v_0 t, \quad & y &= -\frac{1}{2} g t^2, \quad & z &= 0 \\ v_x &= v_0, & v_y &= -g t, & v_z &= 0 \end{aligned} \tag{8}$$

Keď však pri riešení zvislého vrhu dolu a vodorovného vrhu orientujeme os Y k povrchu zemskému, bude zvislý vrh dolu vyjadrený rovnicami:

$$\begin{aligned} y &= v_0 t + \frac{1}{2} g t^2, \quad & x &= 0, \quad & z &= 0 \\ v_y &= v_0 + g t, & v_x &= 0, & v_z &= 0 \end{aligned} \tag{9}$$

a vodorovný vrh rovnicami:

$$\begin{aligned} x &= v_0 t, \quad & y &= \frac{1}{2} g t^2, \quad & z &= 0 \\ v_x &= v_0, & v_y &= g t, & v_z &= 0 \end{aligned} \tag{10}$$

Odvodené vzťahy platia len pre priestor vzduchoprázdny. Odpor vzduchu rýchlosť pohybu ustavične zmenšuje. Pri šikmom a vodorovnom vrhu sa dráha pohybu stáča viac k povrchu zemskému. Na začiatku pohybu skutočná dráha pri pohybe vo vzduchu nie je od dráhy platnej pre vzduchoprázdny priestor veľmi odchylná. Najväčšia výška sa však pri pohybe vo vzduchu dosiahne skôr a je menšia. Zostupná časť dráhy je k povrchu zemskému omnoho viac sklonená. Dráha pohybu je nesúmerná. Dostrel vo vzduchu je omnoho menší ako vo vákuu. Okrem toho Coriolisovo zrýchlenie spôsobuje, že dráha vybočuje z roviny výstrelu na severnej polguli vpravo.

Úlohy na cvičenie

1. Na niti s dĺžkou l je zavesená guľa s veľmi malým polomerom. Akú rýchlosť vo vodorovnom smere jej treba udeliť, aby sa dostala až do svojej najvyššej polohy?

$$(v_0 = \sqrt{5gl})$$

2. Z drôtu s hmotnosťou M bola zhotovená kružnica polomeru R. Odvoďte vzorec pre potenciál a intenzitu jej gravitačného poľa v bode na jej osi vo vzdialenosti a od jej roviny!

$$\left(V = -\frac{\varkappa M}{\sqrt{R^2 + a^2}}, \qquad E = -\frac{\varkappa M a}{\sqrt{(R^2 + a^2)^3}}\right)$$

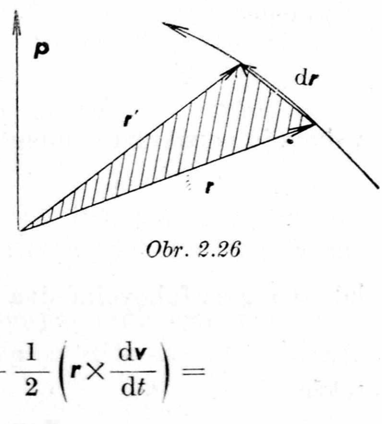
3. Vypočítajte kinetickú energiu telesa s hmotnosťou m, ktoré voľne padá z veľkej výšky h pri jeho dopade na zem, ak polomer Zeme je R a odpor vzduchu možno zanedbať! Aká by bola táto rýchlosť pri dopade z nekonečna?

$$\left(K = mgR\frac{h}{R + h}, \qquad K_\infty = mgR\right)$$

4. Aká je najväčšia rýchlosť nebeského telesa vo vzdialenosti $r = 5 \,.\, 10^8$ km od stredu Slnka, pri ktorej je nebeské teleso ešte planétou Slnka? Súčin gravitačnej konštanty a hmotnosti Slnka odvoďte z obehu Zeme okolo Slnka po približne kruhovej dráhe, $R = 149 \,.\, 10^6$ km, $T = 365$ dní a 6 h! (2 290 ms^{-1})

2.17. Stredové pohyby. Pohyb hmotného bodu za účinku sily, ktorej priamka prechádza stále tým istým nehybným bodom priestoru, stredom pohybu, nazýva sa *stredový* alebo *centrálny*. Za čas dt nech sa sprievodič takto sa pohybujúceho bodu $\boldsymbol{r}$, vzťahujúci sa na stred pohybu, zmení o d$\boldsymbol{r}$ *(obr. 2.26)*. Vytvorí pritom plochu s obsahom rovnajúcim sa absolútnej hodnote súčinu $\frac{1}{2}\boldsymbol{r}\times \mathrm{d}\boldsymbol{r}$. Vektor

$$\boldsymbol{p} = \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{r}\times\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\right) = \frac{1}{2}\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{v} \qquad (1)$$



Obr. 2.26

s absolútnou hodnotou rovnajúcou sa číselne ploche, ktorú vytvorí sprievodič za jednotku času, nazýva sa vektor plošnej rýchlosti alebo plošná rýchlosť pohybu. Pri stredových pohyboch je

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{v})}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\times\boldsymbol{v}\right) + \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{r}\times\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{v}) + \frac{1}{2}(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{a}) = 0$$

pretože $\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{v} = 0$ a vektory $\boldsymbol{r}$ a $\boldsymbol{a}$ zvierajú pri stredovom pohybe uhol 0° alebo 180°, lebo smer zrýchlenia je totožný so smerom sily, $\boldsymbol{a} = \dfrac{\boldsymbol{f}}{m}$, a táto pri stredovom pohybe je so smerom sprievodiča stále súhlasne alebo nesúhlasne rovnobežná. Z rovnice $\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t} = 0$ vyplýva: $\boldsymbol{p} = \mathrm{const.}$