2. Z drôtu s hmotnosťou M bola zhotovená kružnica polomeru R. Odvoďte vzorec pre potenciál a intenzitu jej gravitačného poľa v bode na jej osi vo vzdialenosti a od jej roviny!

$$\left(V = -\frac{\varkappa M}{\sqrt{R^2 + a^2}}, \qquad E = -\frac{\varkappa M a}{\sqrt{(R^2 + a^2)^3}}\right)$$

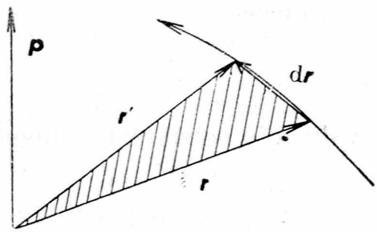
3. Vypočítajte kinetickú energiu telesa s hmotnosťou m, ktoré voľne padá z veľkej výšky h pri jeho dopade na zem, ak polomer Zeme je R a odpor vzduchu možno zanedbať! Aká by bola táto rýchlosť pri dopade z nekonečna?

$$\left(K = mgR\frac{h}{R + h}, \qquad K_{\infty} = mgR\right)$$

4. Aká je najväčšia rýchlosť nebeského telesa vo vzdialenosti $r = 5 \,.\, 10^8$ km od stredu Slnka, pri ktorej je nebeské teleso ešte planétou Slnka? Súčin gravitačnej konštanty a hmotnosti Slnka odvoďte z obehu Zeme okolo Slnka po približne kruhovej dráhe, $R = 149 \,.\, 10^6$ km, $T = 365$ dní a 6 h! (2 290 ms^{-1})

2.17. Stredové pohyby. Pohyb hmotného bodu za účinku sily, ktorej priamka prechádza stále tým istým nehybným bodom priestoru, stredom pohybu, nazýva sa *stredový* alebo *centrálny*. Za čas $\mathrm{d}t$ nech sa sprievodič takto sa pohybujúceho bodu $\boldsymbol{r}$, vzťahujúci sa na stred pohybu, zmení o $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ *(obr. 2.26)*. Vytvorí pritom plochu s obsahom rovnajúcim sa absolútnej hodnote súčinu $\frac{1}{2}\boldsymbol{r}\times\mathrm{d}\boldsymbol{r}$. Vektor

$$\boldsymbol{p} = \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{r} \times \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\right) = \frac{1}{2}\,\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{v} \tag{1}$$



Obr. 2.26

s absolútnou hodnotou rovnajúcou sa číselne ploche, ktorú vytvorí sprievodič za jednotku času, nazýva sa vektor plošnej rýchlosti alebo plošná rýchlosť pohybu. Pri stredových pohyboch je

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2}\,\frac{\mathrm{d}(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{v})}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\times\boldsymbol{v}\right) + \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{r}\times\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\,(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{v}) + \frac{1}{2}\,(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{a}) = 0$$

pretože $\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{v} = 0$ a vektory $\boldsymbol{r}$ a $\boldsymbol{a}$ zvierajú pri stredovom pohybe uhol 0° alebo 180°, lebo smer zrýchlenia je totožný so smerom sily, $\boldsymbol{a} = \dfrac{\boldsymbol{f}}{m}$, a táto pri stredovom pohybe je so smerom sprievodiča stále súhlasne alebo nesúhlasne rovnobežná. Z rovnice $\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t} = 0$ vyplýva: $\boldsymbol{p} = \mathrm{const.}$

Pri stredových pohyboch je vektor plošnej rýchlosti stály. Stredové pohyby sú teda všetky rovinné.

2.18. Harmonický pohyb. Zvláštnymi prípadmi stredových pohybov sú význačné stredové pohyby: pohyb harmonický a pohyb planetárny. Harmonický pohyb vzniká za účinku sily, ktorá je úmerná výchylke hmotného bodu z jeho rovnovážnej polohy a smeruje stále do polohy rovnovážnej, stredu harmonického pohybu. Podľa Hookovho zákona takými silami sa vracajú objemové elementy pružných telies do svojich polôh pokojových. Harmonický pohyb je preto pri fyzikálnych dejoch veľmi častý a veľmi dôležitý. Je to najjednoduchší pohyb periodický čiže kmitavý.

Sila $\mathbf{f}$, účinkujúca na hmotný element, pri harmonickom pohybe závisí od výchylky $\mathbf{r}$ podľa vzťahu

$$\mathbf{f} = -k^2\mathbf{r} \tag{1}$$

Zrýchlenie $\mathbf{z}$ sa teda rovná

$$\mathbf{z} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = -\frac{k^2}{m}\,\mathbf{r} = -\omega^2\mathbf{r}$$

kde $\omega = \sqrt{\dfrac{k^2}{m}}$.

Rovnici

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = -\omega^2\mathbf{r} \tag{2}$$

vyhovujú partikulárne integrály

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{a}\cos\omega t$$

$$\mathbf{r}_2 = \mathbf{b}\sin\omega t$$

kde $\mathbf{a}$ a $\mathbf{b}$ sú ľubovoľné dva vektory. Všeobecný integrál rovnice (2) je preto

$$\mathbf{r} = \mathbf{a}\cos\omega t + \mathbf{b}\sin\omega t \tag{3}$$

takže

$$\mathbf{v} = -\mathbf{a}\omega\sin\omega t + \mathbf{b}\omega\cos\omega t \tag{4}$$

Integračné konštanty $\mathbf{a}$ a $\mathbf{b}$ sú určené začiatočnými podmienkami, polohou bodu $\mathbf{r}_0$ a jeho rýchlosťou $\mathbf{v}_0$ v čase $t = 0$. Vyplývajú z rovníc $\mathbf{r}_0 = \mathbf{a}$, $\mathbf{v}_0 = \mathbf{b}\omega$; $\mathbf{a} = \mathbf{r}_0$, $\mathbf{b} = \dfrac{\mathbf{v}_0}{\omega}$. Harmonický pohyb, ako každý stredový pohyb, je rovinný a prebieha po elipse *(obr. 2.27)* určenej v tvare vektorovom rovnicou (3). Stála plošná rýchlosť je pri ňom $\mathbf{p} = \dfrac{1}{2}\,\mathbf{r}_0 \times \mathbf{v}_0$.