Pri stredových pohyboch je vektor plošnej rýchlosti stály. Stredové pohyby sú teda všetky rovinné.

2.18. Harmonický pohyb. Zvláštnymi prípadmi stredových pohybov sú význačné stredové pohyby: pohyb harmonický a pohyb planetárny. Harmonický pohyb vzniká za účinku sily, ktorá je úmerná výchylke hmotného bodu z jeho rovnovážnej polohy a smeruje stále do polohy rovnovážnej, stredu harmonického pohybu. Podľa Hookovho zákona takými silami sa vracajú objemové elementy pružných telies do svojich polôh pokojových. Harmonický pohyb je preto pri fyzikálnych dejoch veľmi častý a veľmi dôležitý. Je to najjednoduchší pohyb periodický čiže kmitavý.

Sila $\boldsymbol{f}$, účinkujúca na hmotný element, pri harmonickom pohybe závisí od výchylky $\boldsymbol{r}$ podľa vzťahu

$$\boldsymbol{f} = -k^2\boldsymbol{r} \tag{1}$$

Zrýchlenie $\boldsymbol{z}$ sa teda rovná

$$\boldsymbol{z} = \frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{k^2}{m}\boldsymbol{r} = -\omega^2\boldsymbol{r}$$

kde $\omega = \sqrt{\dfrac{k^2}{m}}$.

Rovnici

$$\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2} = -\omega^2\boldsymbol{r} \tag{2}$$

vyhovujú partikulárne integrály

$$\boldsymbol{r}_1 = \boldsymbol{a}\cos\omega t$$

$$\boldsymbol{r}_2 = \boldsymbol{b}\sin\omega t$$

kde $\boldsymbol{a}$ a $\boldsymbol{b}$ sú ľubovoľné dva vektory. Všeobecný integrál rovnice (2) je preto

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{a}\cos\omega t + \boldsymbol{b}\sin\omega t \tag{3}$$

takže

$$\boldsymbol{v} = -\boldsymbol{a}\omega\sin\omega t + \boldsymbol{b}\omega\cos\omega t \tag{4}$$

Integračné konštanty $\boldsymbol{a}$ a $\boldsymbol{b}$ sú určené začiatočnými podmienkami, polohou bodu $\boldsymbol{r}_0$ a jeho rýchlosťou $\boldsymbol{v}_0$ v čase $t = 0$. Vyplývajú z rovníc $\boldsymbol{r}_0 = \boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{v}_0 = \boldsymbol{b}\omega$; $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{r}_0$, $\boldsymbol{b} = \dfrac{\boldsymbol{v}_0}{\omega}$. Harmonický pohyb, ako každý stredový pohyb, je rovinný a prebieha po elipse *(obr. 2.27)* určenej v tvare vektorovom rovnicou (3). Stála plošná rýchlosť je pri ňom $\boldsymbol{p} = \dfrac{1}{2}\boldsymbol{r}_0\times\boldsymbol{v}_0$.

Perióda pohybu je

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k^2}} \tag{5}$$

kruhová frekvencia je ω a frekvencia

$$n = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k^2}{m}}$$

Keď vektory $\boldsymbol{a}$ a $\boldsymbol{b}$ v rovniciach (3) a (4) vyjadríme pomocou začiatočných podmienok

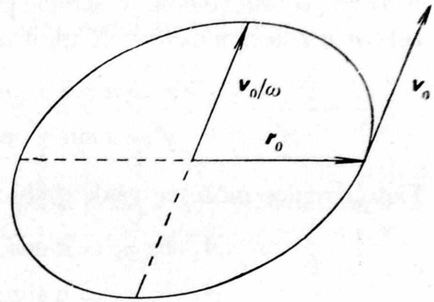
$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{r}_0, \qquad \boldsymbol{b} = \frac{\boldsymbol{v}_0}{\omega}$$

dostávame

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0 \cos \omega t + \frac{\boldsymbol{v}_0}{\omega} \sin \omega t \tag{6}$$

a

$$\boldsymbol{v} = -\boldsymbol{r}_0 \omega \sin \omega t + \boldsymbol{v}_0 \cos \omega t \tag{7}$$



Obr. 2.27

Harmonický pohyb, prebiehajúci všeobecne po elipse, stáva sa podľa rovnice (6) pohybom v priamke v týchto prípadoch:

1. $\boldsymbol{v}_0 = 0$. Hmotný bod bol zo svojej rovnovážnej polohy vychýlený a potom pustený bez začiatočnej rýchlosti. V tom prípade $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0 \cos \omega t$, $\boldsymbol{v} = -\boldsymbol{r}_0 \omega \sin \omega t$.

2. $\boldsymbol{r}_0 = 0$. Hmotnému bodu v jeho rovnovážnej polohe bola udelená rýchlosť $\boldsymbol{v}_0$. V tom prípade $\boldsymbol{r} = \dfrac{\boldsymbol{v}_0}{\omega} \sin \omega t$, $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_0 \cos \omega t$.

3. $\boldsymbol{r}_0 \times \boldsymbol{v}_0 = 0$. Hmotný bod bol zo svojej rovnovážnej polohy vychýlený a bola mu udelená rýchlosť v smere alebo proti smeru výchylky, nebola mu však udelená nijaká plošná rýchlosť.

Harmonický pohyb sa môže stať aj rovnomerným kruhovým pohybom. Podmienkou je, aby smer rýchlosti bol na smer sprievodiča ustavične kolmý, aby platilo $\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{v} = 0$ pre každé t, čiže aby bolo

$$\left(\frac{\boldsymbol{v}_0}{\omega} \sin \omega t + \boldsymbol{r}_0 \cos \omega t\right) . (\boldsymbol{v}_0 \cos \omega t - \boldsymbol{r}_0 \omega \sin \omega t) =$$

$$= \frac{v_0^2}{\omega} \sin \omega t \,.\, \cos \omega t - r_0^2 \omega \sin \omega t \,.\, \cos \omega t = 0$$

takže

$$\frac{v_0^2}{\omega} = r_0^2 \omega, \qquad v_0 = \omega r_0, \qquad \frac{v_0^2}{r_0} = \omega^2 r_0 = \frac{k^2}{m} r_0 = \frac{f_0}{m}$$

Podľa týchto výsledkov harmonický pohyb prechádza v rovnomerný pohyb kruhový, keď sila pri začiatočnej výchylke r_0 práve stačí, aby sa dráha pohybu zakrivila do polomeru rovnajúceho sa výchylke.

Vyjadrenie harmonického pohybu vzhľadom na pravouhlú súradnicovú sústavu, so začiatkom v strede pohybu, vyplýva priamo z rovnice (3). Keď vektor $\boldsymbol{a}$ zviera s osou $+X$ uhol α a vektor $\boldsymbol{b}$ uhol β, vtedy

$$x = a \cos \alpha \,.\, \cos \omega t + b \cos \beta \,.\, \sin \omega t$$

$$y = a \sin \alpha \,.\, \cos \omega t + b \sin \beta \,.\, \sin \omega t$$

Tieto rovnice môžeme však zjednodušiť substitúciami

$$A_1 \sin \varphi_1 = a \cos \alpha, \qquad A_1 \cos \varphi_1 = b \cos \beta$$

$$A_2 \sin \varphi_2 = a \sin \alpha, \qquad A_2 \cos \varphi_2 = b \sin \beta$$

podľa ktorých je

$$A_1 = \sqrt{a^2 \cos^2 \alpha + b^2 \cos^2 \beta}, \qquad A_2 = \sqrt{a^2 \sin^2 \alpha + b^2 \sin^2 \beta}$$

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = \frac{a \cos \alpha}{b \cos \beta}, \qquad \operatorname{tg} \varphi_2 = \frac{a \sin \alpha}{b \sin \beta}$$

Je preto tiež

$$x = A_1 \sin \varphi_1 \cos \omega t + A_1 \cos \varphi_1 \sin \omega t = A_1 \sin (\omega t + \varphi_1)$$

$$y = A_2 \sin \varphi_2 \cos \omega t + A_2 \cos \varphi_2 \sin \omega t = A_2 \sin (\omega t + \varphi_2) \tag{8}$$

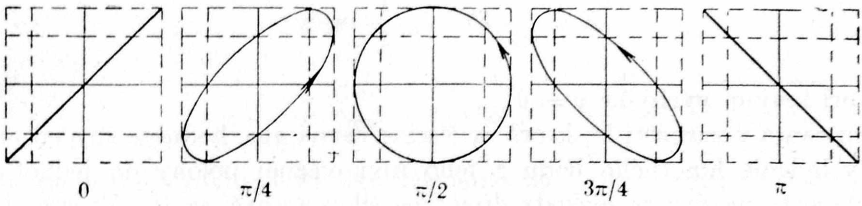
Veličiny φ_1 a φ_2 sa volajú *fázové konštanty*. Podľa rovníc (8) harmonický pohyb je pohyb v priamke, keď $\varphi_2 - \varphi_1 = k\pi$, lebo vtedy $\dfrac{y}{x} = \pm \dfrac{A_2}{A_1}$. Prechádza v rovnomerný pohyb kruhový, keď $A_1 = A_2 = A$ a okrem toho $\varphi_2 - \varphi_1 = (2k + 1) \,.\, \dfrac{\pi}{2}$, keďže v tom prípade $x^2 + y^2 = A^2$.

Na *obr. 2.28* sú zostrojené pohybové krivky pre prípad, že $A_1 = A_2 = A$ a fázové rozdiely $\varphi_2 - \varphi_1$ sú postupne $0, \dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{4}$ a π. Na príslušných krivkách je šípkami vyznačený aj zmysel ich obiehania. Pri fázových rozdieloch $\pi < \varphi_2 - \varphi_1 < 2\pi$ pohybové krivky majú rovnaký tvar, ale zmysel ich obiehania je opačný.

Pri harmonickom pohybe v priamke môžeme napríklad os Y stotožniť s priamkou pohybu. x-ová súradnica bude sa potom stále rovnať nule, $x = 0$, a y-ová súradnica bude

$$y = a \sin (\omega t + \varphi) \tag{9}$$

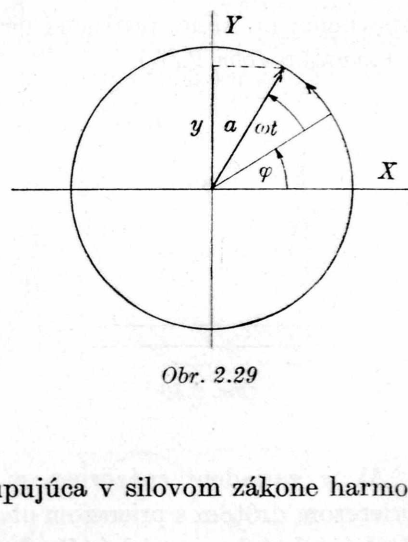
Konštanta a sa volá *amplitúda* harmonického pohybu v priamke. Predstavuje maximálnu výchylku bodu z rovnovážnej polohy pri jeho harmonickom pohybe. Z porovnania rovníc (8) a (9) vyplýva, že každý (netlmený) harmonický pohyb, ktorý vo všeobecnosti prebieha po elipse, možno pokladať za zložený z dvoch harmonických pohybov prebiehajúcich v dvoch priamkach na seba kolmých a prechádzajúcich stredom pohybu.



Obr. 2.28

Podľa vzorca (9) harmonický pohyb bodu v priamke prebieha práve tak ako pohyb projekcie bodu na priemer kružnice s polomerom rovnajúcim sa amplitúde harmonického pohybu, po ktorej sa tento bod pohybuje rovnomerne, uhlovou rýchlosťou ω *(obr. 2.29)*. Fázová konštanta φ určuje polohu bodu na kružnici na začiatku počítania času.

Energia hmotného bodu konajúceho harmonický pohyb sa skladá z pohybovej energie $K = \frac{1}{2} mv^2$ a polohovej U, ktorá sa rovná práci potrebnej na vychýlenie hmotného bodu z jeho rovnovážnej polohy do polohy, v ktorej sa práve nachádza, teda



Obr. 2.29

$$U = \int_0^r k^2 \mathbf{r} \,.\, d\mathbf{r} = \int_0^r k^2 r \, dr = \frac{1}{2} k^2 r^2 \qquad (10)$$

kde $k^2 = m\omega^2$ je konštanta úmernosti vystupujúca v silovom zákone harmonického pohybu $\mathbf{f} = - k^2 \mathbf{r}$.

Presvedčíme sa výpočtom, že pri (netlmenom) harmonickom pohybe súčet energie polohovej a pohybovej je konštantný. Podľa vzorcov (6) a (7) je

$$r^2 = \mathbf{r} \,.\, \mathbf{r} = r_0^2 \cos^2 \omega t + \frac{v_0^2}{\omega^2} \sin^2 \omega t + \frac{2\mathbf{r_0} \,.\, \mathbf{v_0}}{\omega} \sin \omega t \cos \omega t$$

$$v^2 = \mathbf{v} \,.\, \mathbf{v} = r_0^2 \omega^2 \sin^2 \omega t + v_0^2 \cos^2 \omega t - 2\omega \mathbf{r_0} \,.\, \mathbf{v_0} \sin \omega t \cos \omega t$$

Celková energia hmotného bodu pri harmonickom pohybe je teda

$$E = U + K = \frac{1}{2} k^2 r^2 + \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} k^2 r_0^2 + \frac{1}{2} m v_0^2 = \text{const}$$

Keď vo zvláštnom prípade harmonický pohyb prebieha v priamke a jeho amplitúda je a, vtedy

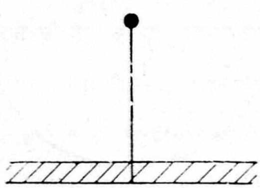
$$E = \frac{1}{2} k^2 a^2 = \frac{1}{2} m \omega^2 a^2 \tag{11}$$

lebo pri krajnej výchylke $v = 0$.

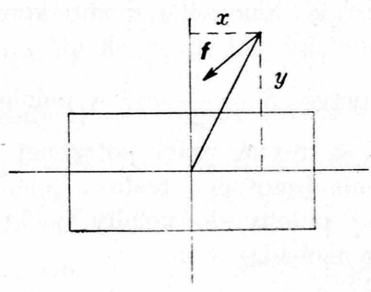
Konštanta úmernosti k^2, ktorá sa číselne rovná abs. hodnote sily potrebnej na vychýlenie hmotného bodu z jeho rovnovážnej polohy do jednotkovej vzdialenosti, nazýva sa niekedy *direkčnou* silou a značí sa P_0. Vzorec (11) je potom

$$E = \frac{1}{2} P_0 a^2 \tag{12}$$

Harmonický pohyb prebiehajúci podľa začiatočných podmienok po elipse, kružnici alebo priamke možno približne realizovať pomocou kovovej guľôčky upevnenej na konci pružného oceľového drôtu, ktorého druhý koniec držíme vo zveráku *(obr. 2.30)*.



Obr. 2.30



Obr. 2.31

Ak v zariadení znázornenom na *obr. 2.30* nahradíme drôt s kruhovým prierezom drôtom s prierezom obdĺžnikovým, guľôčka nebude už konať jednoduchý pohyb harmonický. Zvoľme súradnicový systém tak, ako je to znázornené na *obr. 2.31*. Pri vychýlení guľôčky do polohy so súradnicami x a y nebude na guľôčku účinkovať sila smerujúca do rovnovážnej polohy ako pri jednoduchom harmonickom pohybe, ale sila, ktorú môžeme vyjadriť výrazom

$$\boldsymbol{f} = \boldsymbol{f}_x + \boldsymbol{f}_y = -k_1^2 x \boldsymbol{i} - k_2^2 y \boldsymbol{j} \tag{13}$$

v ktorom konštanty úmernosti k_1^2 a k_2^2 na rozdiel od jednoduchého harmonického pohybu sú rozličné. Z rovnice (13) dostávame diferenciálnu rovnicu pohybu (m značí hmotnosť guľôčky)

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = -\frac{k_1^2}{m}x\mathbf{i} - \frac{k_2^2}{m}y\mathbf{j} = -\omega_1^2 x\mathbf{i} - \omega_2^2 y\mathbf{j}$$

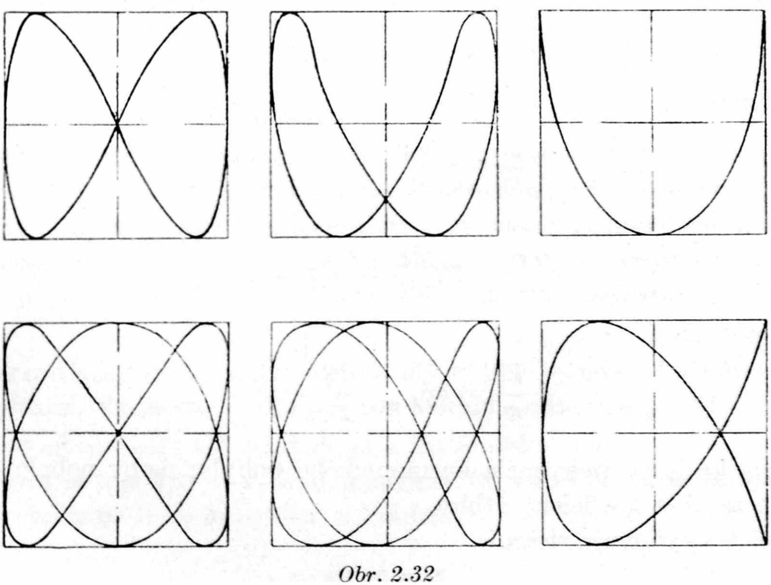
ktorú môžeme nahradiť dvoma skalárnymi rovnicami

$$\begin{aligned}\frac{d^2x}{dt^2} &= -\omega_1^2 x\\ \frac{d^2y}{dt^2} &= -\omega_2^2 y\end{aligned} \tag{14}$$

Všeobecné riešenia rovníc (14), ako už vieme, sú

$$\begin{aligned}x &= x_0 \sin(\omega_1 t + \varphi_1)\\ y &= y_0 \sin(\omega_2 t + \varphi_2)\end{aligned} \tag{15}$$

Podľa rovníc (15) guľôčka upevnená na konci pružného drôtu s obdĺžnikovým prierezom sa pohybuje tak, že jej projekcie na dve priamky, ktoré sú na seba kolmé, konajú harmonické pohyby, avšak s nerovnakými frekvenciami. Vo všeobecnosti pohybová čiara je veľmi zložitá, a nie je uzavretá. Stáva sa podstatne jednoduchšou a uzavretou, ak sú periódy T_1 a T_2, ktoré zodpovedajú kruhovým frekvenciám ω_1 a ω_2, v pomere celých a malých čísiel m a n. Z úmery



Obr. 2.32

$T_1 : T_2 = m : n$ vyplýva, že $T_1 n = T_2 m$. Ak m a n sú najmenšie celé čísla, ktoré túto úmeru spĺňajú, perióda pohybu je $T = nT_1 = mT_2$, teda výsledná frekvencia je $\nu = \frac{1}{T} = \frac{1}{nT_1} = \frac{1}{mT_2} = \frac{\nu_1}{n} = \frac{\nu_2}{m}$.

Na *obr. 2.32* sú zostrojené pohybové krivky (Lissajousove) pre rôzne fázové rozdiely, v prvom riadku pre pomer $\nu_1 : \nu_2 = 1 : 2$ (v hudobnej terminológii príma s oktávou), v druhom riadku pre pomer $\nu_1 : \nu_2 = 2 : 3$ (príma s kvintou).

Pohodlne môžeme Lissajousove krivky získať pomocou katódového oscilografu, v ktorom fluoreskujúca stopa katódových lúčov na stene obrazovky pomocou striedavých elektrických polí je nútená konať harmonické pohyby v dvoch smeroch na seba kolmých, s dvoma frekvenciami, ktoré vzájomne od seba nezávisia a ktoré možno ľubovoľne voliť.

2.19. Tlmený harmonický pohyb. Za účinku sily, ktorá je úmerná výchylke hmotného bodu z jeho rovnovážnej polohy, vzniká pohyb harmonický, prebiehajúci podľa vzorcov odvodených v predošlom článku len vtedy, keď súčasne na hmotný bod neúčinkuje už nijaká iná sila. Pri pohybe vo vzduchu alebo kvapaline musí však hmotný bod prekonávať odpor prostredia, ktorý pohyb brzdí, tlmí, až nakoniec pohyb úplne prestane. Odpor prostredia nezávisí od polohy pohybujúceho sa bodu, ale od jeho rýchlosti. Pri malej rýchlosti je rýchlosti úmerný a pôsobí proti rýchlosti. Pri tlmenom harmonickom pohybe účinkujú teda dve sily: sila $\mathbf{f}_1$, úmerná výchylke ($\mathbf{f}_1 = -k_1^2\mathbf{r}$), a sila $\mathbf{f}_2$, úmerná rýchlosti ($\mathbf{f}_2 = -k_2^2\mathbf{v}$, $\mathbf{f} = \mathbf{f}_1 + \mathbf{f}_2$). Pre tlmený harmonický pohyb platí teda rovnica

$$m\mathbf{a} = -k_1^2\mathbf{r} - k_2^2\mathbf{v}$$

alebo rovnica

$$\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{k_1^2}{m}\mathbf{r} - \frac{k_2^2}{m}\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t} = -\omega_0^2\mathbf{r} - 2b\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t}$$

t. j.

$$\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}}{\mathrm{d}t^2} + 2b\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2\mathbf{r} = 0 \qquad (1)$$

keď sme položili

$$\frac{k_1^2}{m} = \omega_0^2, \qquad \frac{k_2^2}{m} = 2b$$

ω_0 by bola kruhová frekvencia harmonického pohybu, keby nebolo tlmenia, veličina b sa volá koeficient útlmu.

Rovnici (1) vyhovuje riešenie

$$\mathbf{r} = \mathbf{a}\,\mathrm{e}^{\alpha t} \qquad (2)$$