a všeobecné riešenie rovnice (1) je dané vzorcom (5) alebo, v prípade pohybu, v priamke v tvare skalárnom,

$$u = (a_1 + a_2 t)\,\mathrm{e}^{-bt} \tag{14}$$

Keď však v čase $t = 0$ bolo aj $u = 0$, vtedy $a_1 = 0$, $a_2 = a$ a závislosť výchylky od času je *(obr. 2.33c)*

$$u = at\,\mathrm{e}^{-bt} \tag{15}$$

Pre rýchlosť vychádza

$$v = a\,\mathrm{e}^{-bt}(1 - bt) \tag{16}$$

Ostávajúca integračná konštanta a vyplýva zo začiatočnej rýchlosti v_0, $a = v_0$. Maximálna výchylka sa dosiahne v čase t_m, vyplývajúcom z rovnice $v = 0$, t. j.

$$t_m = \frac{1}{b} = \frac{1}{\omega_0} = \frac{T_0}{2\pi} \tag{17}$$

kde T_0 je perióda netlmeného harmonického pohybu.

2.20. Vynútené kmity, rezonancia. Periodický alebo takmer periodický pohyb hmotného bodu alebo telesa nazýva sa vo fyzike aj kmitavý pohyb. Predstavme si malé teliesko hmoty m upevnené tak, že môže konať tlmené kmity harmonické, ktorých kruhová frekvencia, keby tlmenia nebolo, by bola ω_1 (napríklad kovovú guľku na zvislom oceľovom drôte). Na toto teleso nech účinkuje harmonicky sa meniaca vonkajšia sila vyznačujúca sa inou kruhovou frekvenciou ω_2. Keď sila $\mathbf{f}$ zachováva stále tenže smer, môžeme ju písať: $\mathbf{f} = \mathbf{f}_0 \sin \omega_2 t$, alebo v tvare skalárnom: $f = f_0 \sin \omega_2 t$. Diferenciálna rovnica vznikajúceho pohybu je potom (pozri čl. 2.19)

$$m\,\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}t^2} = -k_1^2 u - k_2^2\,\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + f_0 \sin \omega_2 t$$

kde u značí veľkosť okamžitej výchylky. Keď vydelíme túto rovnicu hmotou m a zavedieme substitúcie $\dfrac{k_1^2}{m} = \omega_1^2$, $\dfrac{k_2^2}{m} = 2b$, $\dfrac{f_0}{m} = a$, dostaneme ju v tvare

$$\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}t^2} + 2b\,\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \omega_1^2 u = a \sin \omega_2 t \tag{1}$$

Nebyť vonkajšej sily, bola by to diferenciálna rovnica tlmeného pohybu harmonického, dávajúca — pri pomerne malom tlmení ($b < \omega_1$) — všeobecné riešenie

$$u = C\,\mathrm{e}^{-bt} \sin(\omega t - \varphi_1)$$

kde $\omega = \sqrt{\omega_1^2 - b^2}$. V našom prípade všeobecným integrálom rovnice (1), s pravou stranou, je však funkcia

$$u = C\,\mathrm{e}^{-bt} \sin(\omega t - \varphi_1) + A \sin(\omega_2 t - \varphi_2)$$

Prvý člen tohto výsledku sa však s časom zmenšuje na nulu. Po dostatočne dlhom čase od začiatku účinkovania vonkajšej sily prebieha teda kmitanie, vynútené vonkajšou silou, podľa rovnice

$$u = A \sin (\omega_2 t - \varphi) \tag{2}$$

Jeho amplitúdu A a fázovú konštantu φ nájdeme dosadením získaného výsledku do pôvodnej rovnice (1). Je

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = \omega_2 A \cos (\omega_2 t - \varphi)$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}t^2} = -\omega_2^2 A \sin (\omega_2 t - \varphi)$$

Má byť teda splnená rovnica

$$-\omega_2^2 A \sin (\omega_2 t - \varphi) + 2\omega_2 b A \cos (\omega_2 t - \varphi) + \omega_1^2 A \sin (\omega_2 t - \varphi) = a \sin \omega_2 t.$$

Porovnanie koeficientov pri $\sin \omega_2 t$ a $\cos \omega_2 t$ poskytujú rovnice

$$(\omega_1^2 - \omega_2^2) A \cos \varphi + 2\omega_2 b A \sin \varphi = a$$

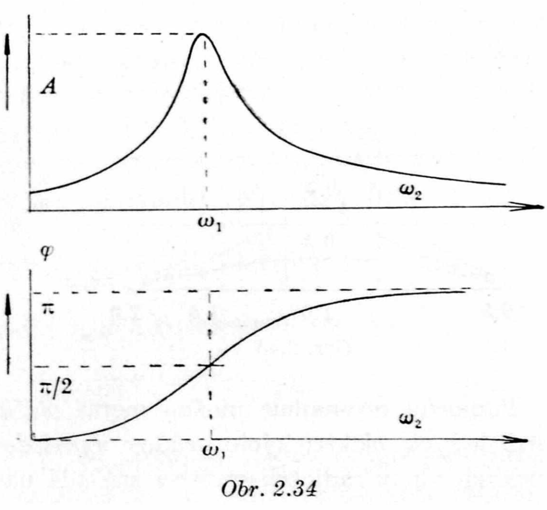
$$(\omega_1^2 - \omega_2^2) \sin \varphi = 2\omega_2 b \cos \varphi$$

Z nich vyplýva

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{2\omega_2 b}{\omega_1^2 - \omega_2^2} \tag{3}$$

$$A = \frac{a}{\sqrt{(\omega_1^2 - \omega_2^2)^2 + 4b^2\omega^2}} \tag{4}$$

pričom ak chceme, aby konštanta A bola kladná a mala teda význam amplitúdy vynútených harmonických kmitov, uhol φ sa mení v intervale 0 až π. Závislosti amplitúdy A a fázového oneskorenia φ od kruhovej frekvencie ω_2 vonkajšej sily sú znázornené na *obr. 2.34.*



Obr. 2.34

Zo vzorca (4) je zrejmé, že pri danom tlmení amplitúda vynútených kmitov je najväčšia, keď sa ω_2 skoro rovná ω_1; keby nebolo útlmu, bola by pri $\omega_2 = \omega_1$

nekonečná. V tom prípade hovoríme, že pružne upevnené teleso *rezonuje* na vonkajšiu, periodicky sa meniacu silu. Rezonancia vysvetľuje praskanie i veľmi pevných predmetov (osí strojov, betónových stropov, nosných plôch lietadiel), keď sa frekvencia ich vlastných kmitov rovná alebo je dosť blízka frekvencii vonkajšej sily.

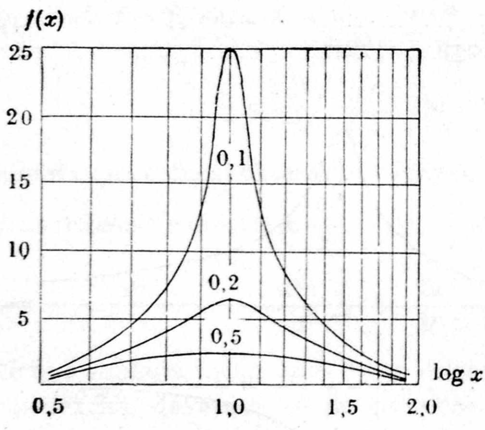
Energiu hmotného bodu konajúceho harmonický pohyb *(intenzitu kmitania)* udáva vzorec (2.18.11), podľa ktorého v našom prípade máme

$$E = \frac{1}{2}\, m\omega_2^2 A^2 = \frac{1}{2}\, ma^2 \frac{\omega_2^2}{(\omega_1^2 - \omega_2^2)^2 + 4b^2\omega_2^2}$$

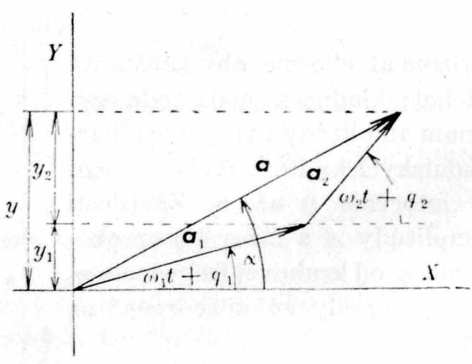
Keď zavedieme ešte pomer kmitočtov $x = \omega_2/\omega_1$, dostávame

$$E = \frac{ma^2}{2\omega_1^2} \frac{1}{\left(\frac{1}{x} - x\right)^2 + \frac{4b^2}{\omega_1^2}} = \frac{ma^2}{2\omega_1^2} f(x)$$

Podiel x sa nazýva rozladením vonkajšej sily a kmitajúceho telesa. Priebeh funkcie $f(x)$ pre tri rôzne hodnoty útlmu ($b = 0{,}1\omega_1$, $0{,}2\omega_1$ a $0{,}5\omega_1$) podáva *obr. 2.35.* Sú to rezonančné krivky, na ktorých sú hodnoty $f(x)$ vynesené proti $\log x$. Tieto krivky jasne ukazujú, že intenzita vynútených kmitov klesá s rozladením tým rýchlejšie, čím je útlm b menší. Krivky sú symetrické, lebo ak $\log x_1 = -\log x_2$, t. j. $x_1 = \frac{1}{x_2}$, je zrejme $f(x_1) = f(x_2)$.



Obr. 2.35



Obr. 2.36

Pomocou rezonancie možno merať *otáčky* strojových častí aj frekvenciu striedavých elektrických prúdov *(periódometre)*. Aj príjem elektromagnetických vĺn v rádiotelegrafii sa zakladá na rezonancii vstupného oscilačného okruhu na frekvenciu prijímanej vlny. Rezonančné otáčkomery skladajú sa z radu jazýčkov, z ktorých každý je schopný kmitať inou frekvenciou (frekvencia sa upravuje už pri výrobe pomocou malých závaží na voľných koncoch jazýčkov). Po priložení prístroja ku skúmanému stroju jazýčky otáčkomeru sa rozkmitajú, najviac ten, ktorého vlastná frekvencia je najbližšia frekvencii chvenia stroja, totožnej s hľadanou frekvenciou otáčania. Jazýčky periódometrov založených na rovnakom princípe sa rozkmitávajú pomocou elektromagnetov budených striedavým prúdom zo skúmaného zdroja.

2.21. Skladanie rovnobežných kmitov. Môže sa stať, že na kmitania schopný hmotný element alebo teleso účinkujú súčasne dve s časom periodicky sa meniace sily. Pravá strana príslušnej diferenciálnej rovnice, podobnej rovnici (2.20.1), je potom o jeden člen bohatšia. Z toho vyplýva, že po ustálení pohybového stavu sa výchylka hmotného elementu v každom čase rovná súčtu výchyliek, ktoré by vznikli, keby pôsobila vždy len jedna sila.

Zaujímavý a prakticky dôležitý prípad pohybu nastane, ak sily vynucujúce kmity sú navzájom rovnobežné a s časom sa menia harmonicky. Ak tieto sily sú rovnobežné s osou Y a pôsobia napríklad na hmotný bod, ktorý je pružne viazaný na začiatok súradnicového systému, vzniká pohyb vyjadrený rovnicou

$$y = y_1 + y_2 = a_1 \sin(\omega_1 t + \varphi_1) + a_2 \sin(\omega_2 t + \varphi_2) \tag{1}$$

Funkcii tvaru $y = a \sin(\omega t + \varphi)$ môžeme v rovine XY priradiť vektor $\boldsymbol{a}$, orientovanú úsečku dĺžky a, ktorá s osou X v každom čase zviera uhol $\alpha = \omega t + \varphi$. Táto úsečka sa teda v rovine XY otáča uhlovou rýchlosťou ω a v čase $t = 0$, zviera s osou X uhol φ. Je kinematickým obrazom funkcie $y = a \sin(\omega t + \varphi)$, lebo veľkosť jej projekcie na os Y v každom čase je práve y. Podľa toho výraz vystupujúci na pravej strane rovnice (1) môžeme pokladať za súčet projekcií vektorov $\boldsymbol{a}_1$ a $\boldsymbol{a}_2$, obrazov výchyliek y_1 a y_2. Ale pretože súčet projekcií dvoch vektorov na tú istú priamku sa rovná projekcii súčtu týchto dvoch vektorov na túto priamku, môžeme nájsť y grafickou konštrukciou podľa *obr. 2.36*. Ak vektor $\boldsymbol{a}$ v čase t zviera s osou X uhol α, je

$$y = a \sin \alpha$$

kde a aj α sú funkcie času. Podľa *obr. 2.36* a kosínusovej vety je

$$a = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + 2a_1a_2 \cos[(\omega_2 - \omega_1)t + (\varphi_2 - \varphi_1)]}$$

a mohli by sme vypočítať aj uhol α. Vo všeobecnosti pohyb vyjadrený vzorcom (1) nie je teda harmonický, a to z dvoch príčin: 1. absolútna hodnota vektora $\boldsymbol{a}$