sa z radu jazýčkov, z ktorých každý je schopný kmitať inou frekvenciou (frekvencia sa upravuje už pri výrobe pomocou malých závaží na voľných koncoch jazýčkov). Po priložení prístroja ku skúmanému stroju jazýčky otáčkomeru sa rozkmitajú, najviac ten, ktorého vlastná frekvencia je najbližšia frekvencii chvenia stroja, totožnej s hľadanou frekvenciou otáčania. Jazýčky periódometrov založených na rovnakom princípe sa rozkmitávajú pomocou elektromagnetov budených striedavým prúdom zo skúmaného zdroja.

2.21. Skladanie rovnobežných kmitov. Môže sa stať, že na kmitania schopný hmotný element alebo teleso účinkujú súčasne dve s časom periodicky sa meniace sily. Pravá strana príslušnej diferenciálnej rovnice, podobnej rovnici (2.20.1), je potom o jeden člen bohatšia. Z toho vyplýva, že po ustálení pohybového stavu sa výchylka hmotného elementu v každom čase rovná súčtu výchyliek, ktoré by vznikli, keby pôsobila vždy len jedna sila.

Zaujímavý a prakticky dôležitý prípad pohybu nastane, ak sily vynucujúce kmity sú navzájom rovnobežné a s časom sa menia harmonicky. Ak tieto sily sú rovnobežné s osou Y a pôsobia napríklad na hmotný bod, ktorý je pružne viazaný na začiatok súradnicového systému, vzniká pohyb vyjadrený rovnicou

$$y = y_1 + y_2 = a_1 \sin(\omega_1 t + \varphi_1) + a_2 \sin(\omega_2 t + \varphi_2) \tag{1}$$

Funkcii tvaru $y = a \sin(\omega t + \varphi)$ môžeme v rovine XY priradiť vektor $\mathbf{a}$, orientovanú úsečku dĺžky a, ktorá s osou X v každom čase zviera uhol $\alpha = \omega t + \varphi$. Táto úsečka sa teda v rovine XY otáča uhlovou rýchlosťou ω a v čase $t = 0$, zviera s osou X uhol φ. Je kinematickým obrazom funkcie $y = a \sin(\omega t + \varphi)$, lebo veľkosť jej projekcie na os Y v každom čase je práve y. Podľa toho výraz vystupujúci na pravej strane rovnice (1) môžeme pokladať za súčet projekcií vektorov $\mathbf{a}_1$ a $\mathbf{a}_2$, obrazov výchyliek y_1 a y_2. Ale pretože súčet projekcií dvoch vektorov na tú istú priamku sa rovná projekcii súčtu týchto dvoch vektorov na túto priamku, môžeme nájsť y grafickou konštrukciou podľa *obr. 2.36.* Ak vektor $\mathbf{a}$ v čase t zviera s osou X uhol α, je

$$y = a \sin \alpha$$

kde a aj α sú funkcie času. Podľa *obr. 2.36* a kosínusovej vety je

$$a = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + 2a_1 a_2 \cos[(\omega_2 - \omega_1)t + (\varphi_2 - \varphi_1)]}$$

a mohli by sme vypočítať aj uhol α. Vo všeobecnosti pohyb vyjadrený vzorcom (1) nie je teda harmonický, a to z dvoch príčin: 1. absolútna hodnota vektora $\mathbf{a}$

nie je konštantná, ale mení sa s periódou T_r, ktorá vyplýva z rovnice $(\omega_2 - \omega_1)\, T_r = 2\pi$, teda

$$T_r = \frac{2\pi}{\omega_2 - \omega_1} = \frac{2\pi}{2\pi\nu_2 - 2\pi\nu_1} = \frac{1}{\nu_2 - \nu_1} \tag{2}$$

ak predpokladáme, že je $\omega_2 > \omega_1$; 2. vektor $\boldsymbol{a}$ sa neotáča v rovine XY konštantnou uhlovou rýchlosťou.

Podrobnejšie preštudujeme zvláštny prípad, keď $a_2 = a_1$ a $\varphi_2 = \varphi_1 = 0$. Vtedy

$$y = a_1(\sin \omega_1 t + \sin \omega_2 t)$$

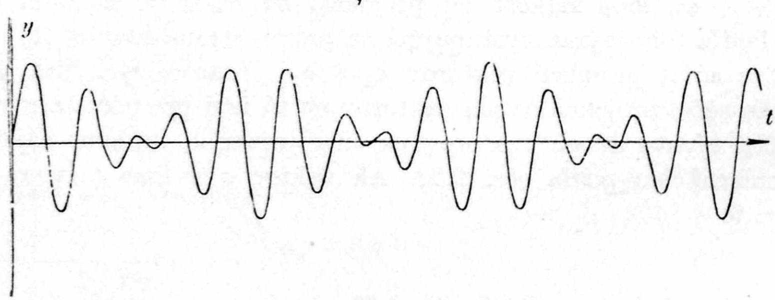
alebo, ak zavedieme substitúciu $\alpha = \dfrac{\omega_1 + \omega_2}{2}$, $\beta = \dfrac{\omega_2 - \omega_1}{2}$, takže bude $\omega_1 = \alpha - \beta$, $\omega_2 = \alpha + \beta$,

$$y = a_1(\sin \alpha t \cos \beta t - \cos \alpha t \sin \beta t + \sin \alpha t \cos \beta t + \cos \alpha t \sin \beta t) =$$
$$= 2a_1 \cos \beta t \sin \alpha t = a \cos\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2}\, t\right) \sin\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}\, t\right) \tag{3}$$

kde $a = 2a_1$.

Rovnicou (3) vyjadrený pohyb, ak rozdiel $\omega_2 - \omega_1$ je malý, môžeme považovať za harmonický pohyb s výslednou kruhovou frekvenciou $\omega = (\omega_1 + \omega_2)/2$, ktorého amplitúda $A = a \cos\left(\dfrac{\omega_2 - \omega_1}{2}\, t\right)$ sa však s časom mení *(obr. 2.37)*. Prejavuje sa to ako kolísanie intenzity kmitania *(rázy)*. Periódu premenlivej amplitúdy udáva vzorec (2), podľa ktorého frekvencia rázov je

$$\nu_r = \frac{1}{T_r} = \nu_2 - \nu_1 \tag{4}$$



Obr. 2.37

Pomocou rázov možno veľmi citlivo kontrolovať rovnosť dvoch frekvencií. Ak sa jedna z nich blíži k druhej, frekvencia rázov sa zmenšuje a pri rovnosti frekvencií rázy sa stratia.

Napriek tomu, že amplitúda a súčtu dvoch rovnobežných kmitaní je vždy periodická funkcia času, práve tak ako v prípade na seba kolmých kmitov, aj v tomto prípade výsledný pohyb je prísne periodický len vtedy, keď periódy skladaných pohybov sú v pomere celých čísiel.

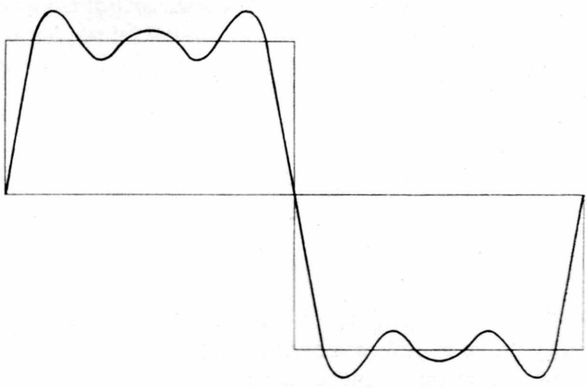
Francúzsky matematik a fyzik Jean Baptiste Joseph Fourier (1768—1830) dokázal, že je riešiteľná aj obrátená úloha, a to rozklad periodickej funkcie času t, $y = f(t)$, ktorá sa vyznačuje periódou T, na súčet konštanty a vo všeobecnosti nekonečne veľkého počtu harmonických funkcií času. Príslušný vzorec, nazývaný *Fourierovým radom*, je

$$y = A_0 + A_1 \cos \omega t + A_2 \cos 2\omega t + A_3 \cos 3\omega t + \ldots + \\ + B_1 \sin \omega t + B_2 \sin 2\omega t + B_3 \sin 3\omega t + \ldots \tag{5}$$

Konštanty A_0, A_k a B_k určujú vzorce

$$A_0 = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,\mathrm{d}t, \qquad A_k = \frac{2}{T}\int_0^T f(t) \cos (k\omega t)\,\mathrm{d}t, \qquad B_k = \frac{2}{T}\int_0^T f(t) \sin (k\omega t)\,\mathrm{d}t \tag{6}$$

v ktorých $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$. Dokazujú sa vo všetkých učebniciach vysokoškolskej matematiky.



Obr. 2.38

Príklad 1. Vyjadríme Fourierovým radom periodickú funkciu času $y = f(t)$, ktorej funkčná hodnota pre t z intervalu $0 \leq t < T/2$ je $y = y_0$, pre $t = T/2$ je $y = 0$, pre t z intervalu $T/2 < t \leq T$ je $y = -y_0$, pričom $T = 2\pi$s a $y_0 = 2$ cm (*obr. 2.38*).

V tomto prípade $A_0 = 0$. Jednoduchým výpočtom sa možno presvedčiť o tom, že aj $A_k = 0$ a $B_k = 4y_0/k\pi$ pre k nepárne, zatiaľ čo pre párne k je $B_k = 0$. V našom prípade teda platí

$$y = \frac{4y_0}{\pi}\left(\sin \omega t + \frac{1}{3} \sin 3\omega t + \frac{1}{5} \sin 5\omega t + \ldots\right)$$

Súčet prvých troch členov tohto rozkladu je znázornený aj na *obr. 2.38*.

Úlohy na cvičenie

1. Teleso voľným pádom padá z neznámej výšky a v poslednej sekunde pred dopadom prebehne $^1/_5$ celej svojej dráhy. Aká je výška y a doba pádu t? ($y = 442{,}7$ m, $t = 9{,}5$ s)

2. Určte začiatočnú rýchlosť v_0, ktorou bola vystrelená guľa v zvislom smere, a výšku h, ktorú guľa dosiahla, ak spadla späť na zem po čase T! Odpor vzduchu zanedbajte!

$$\left(v_0 = \frac{1}{2}\,gT,\ h = \frac{1}{8}\,gT^2\right)$$

3. Teleso bolo vyhodené v čase $t = O$ zvisle nahor začiatočnou rýchlosťou v_0. V čase $t = t_0$ bolo za ním vyhodené v tom istom smere druhé teleso tou istou začiatočnou rýchlosťou. V ktorom čase a v akej výške sa obidve telesá stretnú? Odpor vzduchu pri výpočte zanedbajte!

$$\left(t = \frac{v_0}{g} + \frac{t_0}{2}, \qquad h = \frac{v_0^2}{2g} - \frac{1}{8}\,gt_0^2\right)$$

4. Objekt v priamej vzdušnej vzdialenosti $d = 500$ m pozoruje sa pod výškovým uhlom $\varphi = 30°$. Aká veľká musí byť aspoň začiatočná rýchlosť pri výstrele, aby objekt mohol byť ešte zasiahnutý? Aký je príslušný výškový uhol výstrelu?

$$\left(v_0 = \sqrt{(1 + \sin\varphi)\,gd} = \sqrt{\frac{3gd}{2}} = 85{,}8\ \mathrm{ms}^{-1},\ \alpha = \frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{4} = 60°\right)$$

5. Na vrchole dokonale hladkej gule je malé teliesko v metastabilnej polohe. Keď ho z jeho rovnovážnej polohy vychýlime, bude sa zo začiatku pohybovať po povrchu gule. V akej vzdialenosti od zvislého priemeru gule opustí jej povrch a v akej vzdialenosti dopadne na vodorovnú rovinu, na ktorej guľa spočíva, keď jej polomer je $r = 1{,}5$ m? (1,118 m, 2,32 m)

6. Zvisle visiaca oceľová špirála zanedbateľnej hmotnosti tiažou závažia s hmotnosťou m sa predĺži o dĺžku a. Aká je perióda možných harmonických kmitov takto zaveseného závažia v zvislej priamke?

$$\left(T = 2\pi\sqrt{\frac{a}{g}}\right)$$

7. Na zvislom oceľovom drôte s dĺžkou l je upevnená guľôčka s hmotnosťou m. Na to, aby sa guľôčka vychýlila zo svojej rovnovážnej polohy o dĺžku d, je potrebná sila rovnajúca sa jej tiaži. Aká je perióda možného harmonického pohybu guľôčky? Pri výpočte neberte ohľad na zemské silové pole.

$$\left(T = 2\pi\sqrt{\frac{d}{g}}\right)$$

8. Rúrka tvaru písmena U obsahuje kvapalinu s mernou hmotnosťou s a na začiatku počítania času hladiny kvapaliny v ramenách rúrky sú práve v pokoji, avšak v nerovnakých výškach. Aká je perióda ich kmitania, keď celková dĺžka kvapalinového stĺpca je l a vnútorné trenie možno zanedbať?

$$\left(T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{2g}}\right)$$