2.22. Planetárny pohyb. Podľa Newtonovho gravitačného zákona dva hmotné elementy sa priťahujú silou, ktorej absolútna hodnota je priamo úmerná súčinu ich hmotností a nepriamo úmerná druhej mocnine ich vzájomnej vzdialenosti. Vzhľadom na tento silový zákon, ktorým sa spravuje pohyb planét, každý stredový pohyb hmotného bodu, pri ktorom sila pôsobiaca na hmotný bod je nepriamo úmerná druhej mocnine jeho vzdialenosti od pevného bodu, nazýva sa *planetárnym pohybom.* V tomto článku, vychádzajúc z práve podanej definície planetárneho pohybu, odvodíme Keplerove zákony, platiace pre *planetárny* pohyb.

Závislosť sily od vzdialenosti hmotného bodu od stredu pohybu je teda pri planetárnom pohybe vyjadrená vzťahom

$$\mathbf{f} = -k\,\frac{\mathbf{r}}{r^3}$$

t. j.

$$\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}}{\mathrm{d}t^2} = \mathbf{a} = \frac{\mathbf{f}}{m} = -\frac{k}{m}\,\frac{\mathbf{r}}{r^3} \tag{1}$$

Zrýchlenie $\mathbf{a}$ podľa vzorca (1.4.4) môže sa vyjadriť ako súčet radiálneho a priečneho zrýchlenia:

$$\mathbf{a} = \left(\frac{\mathrm{d}^2r}{\mathrm{d}t^2} - \omega^2 r\right)\boldsymbol{\rho} + \left(\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}\,r + 2\omega\,\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\right)(\boldsymbol{\nu}\times\boldsymbol{\rho})$$

V našom prípade, keďže ide o stredový pohyb, vektor $\boldsymbol{\nu}$ je jednotkový vektor, kolmý na rovinu planetárneho pohybu. Pri planetárnom pohybe je toto zrýchlenie

$$\mathbf{a} = -\frac{k}{m}\,\frac{\mathbf{r}}{r^3} = -\frac{k}{m}\,\frac{\boldsymbol{\rho}}{r^2}$$

teda

$$\left(\frac{\mathrm{d}^2r}{\mathrm{d}t^2} - r\omega^2\right)\boldsymbol{\rho} + \left(r\,\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} + 2\omega\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\right)(\boldsymbol{\nu}\times\boldsymbol{\rho}) = -\frac{k}{m}\,\frac{\boldsymbol{\rho}}{r^2}$$

alebo

$$\left(\frac{k}{m}\,\frac{1}{r^2} - r\omega^2 + \frac{\mathrm{d}^2r}{\mathrm{d}t^2}\right)\boldsymbol{\rho} + \left(r\,\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} + 2\omega\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\right)(\boldsymbol{\nu}\times\boldsymbol{\rho}) = 0 \tag{2}$$

Táto vektorová diferenciálna rovnica predstavuje dve diferenciálne rovnice skalárne

$$2\omega\,\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} + r\,\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = 0 \tag{3}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2r}{\mathrm{d}t^2} + \frac{k}{m}\,\frac{1}{r^2} - r\omega^2 = 0 \tag{4}$$

Diferenciálnu rovnicu dráhy planetárneho pohybu dostaneme v polárnych súradniciach eliminovaním času z týchto dvoch posledných rovníc. Z rovnice (3) vyplýva

$$2\,\frac{\mathrm{d}r}{r} = -\,\frac{\mathrm{d}\omega}{\omega}$$

$$\log r^2 + \log \omega = \mathrm{const}$$

$$r^2\omega = C \tag{5}$$

$$\omega = \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} = \frac{C}{r^2}$$

kde C je dvojnásobok absolútnej hodnoty plošnej rýchlosti $\boldsymbol{p} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{v})$. Za účelom úpravy rovnice (4) napíšeme

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\varphi}\cdot\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}$$

z čoho, keď použijeme výsledok (5), postupne dostávame

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\varphi}\cdot\frac{C}{r^2} = -C\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varphi}\left(\frac{1}{r}\right)$$

$$\frac{\mathrm{d}^2r}{\mathrm{d}t^2} = -C\cdot\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\varphi^2}\left(\frac{1}{r}\right)\cdot\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} = -\,\frac{C^2}{r^2}\cdot\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\varphi^2}\left(\frac{1}{r}\right)$$

Keď dosadíme aj tento vzťah do rovnice (4), dostaneme

$$-\,\frac{C^2}{r^2}\cdot\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\varphi^2} \qquad \frac{k}{m}\frac{1}{r^2} - r\frac{C^2}{r^4} = 0$$

a po vynásobení zlomkom $-\,\frac{r^2}{C^2}$ a upravení

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\varphi^2}\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{k}{mC^2} - \frac{1}{r} = -\left(\frac{1}{r} - \frac{k}{mC^2}\right)$$

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\varphi^2}\left(\frac{1}{r} - \frac{k}{mC^2}\right) = -\left(\frac{1}{r} - \frac{k}{mC^2}\right) \tag{6}$$

Táto diferenciálna rovnica má tvar $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}\varphi^2} = -y$ a jej všeobecné riešenie, ako už vieme, je

$$y = A\sin(\varphi + \alpha) = -A\cos\left(\varphi + \alpha + \frac{\pi}{2}\right) = -A\cos(\varphi + \varphi_0)$$

Všeobecné riešenie rovnice (6) je teda

$$\frac{1}{r} - \frac{k}{mC^2} = -A\cos(\varphi + \varphi_0)$$

z čoho

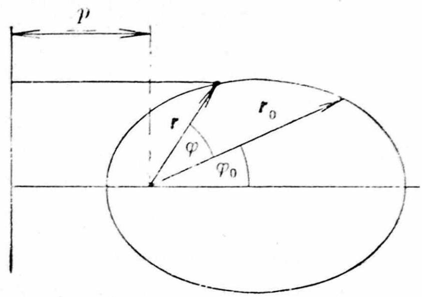
$$r = \frac{1}{\dfrac{k}{mC^2} - A\cos(\varphi + \varphi_0)} = \frac{\dfrac{mC^2}{k}}{1 - \dfrac{AmC^2}{k}\cos(\varphi + \varphi_0)} \tag{7}$$

Pre kužeľosečku ako geometrické miesto bodov v rovine, ktoré sa vyznačujú stálym podielom ε svojich vzdialeností od bodu a priamky, z *obr. 2.39* pri použití polárnych súradníc vyplýva

$$\varepsilon = \frac{r}{p + r\cos(\varphi + \varphi_0)}$$

alebo

$$r = \frac{\varepsilon p}{1 - \varepsilon\cos(\varphi + \varphi_0)} \tag{8}$$



Obr. 2.39

$$\text{Pri } \varepsilon \begin{cases} < 1 & \\ = 1 \text{ je kužeľosečka} & \\ > 1 & \end{cases} \begin{matrix} \textit{elipsa,} \\ \textit{parabola,} \\ \textit{hyperbola.} \end{matrix}$$

Z porovnania rovníc (7) a (8) vyplýva, že dráha pri pohybe planetárnom je kužeľosečka,

$$\text{pri } \varepsilon = \frac{AmC^2}{k} \left\{ \begin{aligned} &< 1 \textit{ elipsa,} \\ &= 1 \textit{ parabola,} \\ &> 1 \textit{ hyperbola.} \end{aligned} \right. \tag{9}$$

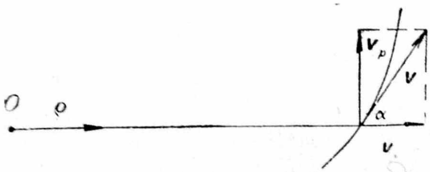
Jej parameter určuje podiel

$$p = \frac{\varepsilon p}{\varepsilon} = \frac{\dfrac{mC^2}{k}}{A\,\dfrac{mC^2}{k}} = \frac{1}{A} \tag{10}$$

V rovnici (7) vystupujúce integračné konštanty C, A a φ_0 vyplývajú zo začiatočných podmienok, z polohy bodu $\mathbf{r}_0$ a jeho rýchlosti $\mathbf{v}_0$ na začiatku počítania času. O konštante C už vieme, že sa rovná dvojnásobku absolútnej hodnoty v našom prípade konštatnej plošnej rýchlosti. Teda $C = |\mathbf{r}_0 \times \mathbf{v}_0| = r_0 v_0 \sin\alpha_0$, ak v čase $t = 0$ vektory $\mathbf{r}_0$ a $\mathbf{v}_0$ zvierali spolu uhol α_0.

Ostáva ešte určiť konštanty A a φ_0.

Keď rýchlosť **v** zviera so smerom polohového vektora uhol α, podľa *obr. 2.40*



Obr. 2.40

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{r \dfrac{d\varphi}{dt}}{\dfrac{dr}{dt}} = r \frac{d\varphi}{dr}$$

teda

$$\frac{1}{r} \frac{dr}{d\varphi} = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} \tag{11}$$

Derivovaním rovnice (7), t. j. rovnice $r \dfrac{k}{mC^2} - Ar \cos(\varphi + \varphi_0) = 1$, podľa φ dostávame

$$\frac{k}{mC^2} \frac{dr}{d\varphi} + Ar \sin(\varphi + \varphi_0) = A \cos(\varphi + \varphi_0) \frac{dr}{d\varphi}$$

$$\frac{dr}{d\varphi} \left[\frac{k}{mC^2} - A \cos(\varphi + \varphi_0) \right] = -Ar \sin(\varphi + \varphi_0)$$

$$\frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{1}{r} \frac{dr}{d\varphi} = \frac{A \sin(\varphi + \varphi_0)}{A \cos(\varphi + \varphi_0) - \dfrac{k}{mC^2}} \tag{12}$$

Predstavme si, že sme čas pri sledovaní planetárneho pohybu začali počítať v okamihu, keď bolo $\varphi = 0$ a súčasne $r = r_0$ a $\alpha = \alpha_0$. Ostávajúce integračné konštanty A a φ_0 môžu sa potom určiť pomocou rovníc (7) a (12), ak do nich dosadíme tieto začiatočné podmienky, teda z rovníc

$$r_0 = \frac{1}{\dfrac{k}{mC^2} - A \cos \varphi_0}, \qquad \operatorname{tg} \alpha_0 = \frac{A \cos \varphi_0 - \dfrac{k}{mC^2}}{A \sin \varphi_0}$$

Dráha pri planetárnom pohybe je elipsa, keď $\varepsilon < 1$. Jej hlavná polos má podľa rovnice (8) a *obr. 2.39* dĺžku a, pre ktorú platí

$$a + e = \frac{\varepsilon p}{1 - \varepsilon}, \qquad a - e = \frac{\varepsilon p}{1 + \varepsilon}, \qquad a = \frac{\varepsilon p}{1 - \varepsilon^2}$$

Výstrednosť elipsy je

$$e = \frac{\varepsilon p}{1 - \varepsilon} - a = \frac{\varepsilon^2 p}{1 - \varepsilon^2}$$

a vedľajšia polos

$$b = \sqrt{a^2 - e^2} = \frac{\varepsilon p}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}}$$

Doba obehu je

$$T = \frac{\pi ab}{C/2}$$

takže

$$T^2 = \frac{4\pi^2(\varepsilon p)^4}{C^2(1 - \varepsilon^2)^3} = \frac{4\pi^2(\varepsilon p)^3}{\frac{k}{m}(1 - \varepsilon^2)^3} = \frac{4\pi^2 m}{k} a^3$$

Planéty pri svojom obehu okolo Slnka sú pod účinkom Newtonovej gravitačnej sily, $\boldsymbol{f} = -\varkappa \frac{Mm}{r^3} \boldsymbol{r}$, kde M je hmotnosť Slnka, m hmotnosť planéty a r vzdialenosť planéty od Slnka. Z porovnania s rovnicou $\boldsymbol{f} = -k \frac{\boldsymbol{r}}{r^3}$ vyplýva, že pri pohybe planét okolo Slnka $k = \varkappa Mm$.

Planéty pohybujú sa teda okolo Slnka po dráhach daných rovnicou

$$r = \frac{\frac{C^2}{\varkappa M}}{1 - A \frac{C^2}{\varkappa M} \cos(\varphi + \varphi_0)} \tag{13}$$

s obežnou dobou, ktorej druhá mocnina je

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{\varkappa M} a^3 \tag{14}$$

Podľa našich výsledkov pre ich pohyb platia *Keplerove zákony*, ktoré sme dostali ako dôsledok *gravitačného Newtonovho zákona*.

1. Podľa rovnice (13) dráhy planét sú kužeľosečky.
2. Ich plošné rýchlosti sú stále [rovnica (5)].
3. Druhé mocniny obežných dôb sú úmerné tretím mocninám hlavných polosí eliptických dráh planét [rovnica (14)].

Pri odvodzovaní Keplerových zákonov sme predpokladali, že centrálne teleso hmoty M (Slnko) je v nejakom inerciálnom systéme nehybné. Tento predpoklad v skutočnosti nie je splnený, lebo podľa vety o ťažisku, s ktorou sa oboznámime v čl. 3.2, keď na sústavu hmotných bodov nepôsobí nijaká vonkajšia sila, nie jeden z nich, ale ich spoločné ťažisko je v určitom inerciálnom systéme v pokoji. Táto okolnosť spôsobuje, že Keplerove zákony, najmä jeho tretí zákon, v slnečnej sústave neplatia presne. Ale pretože hmotnosť Slnka je nepomerne väčšia ako hmotnosť všetkých jeho planét spolu, odchýlky sú malé.

Úloha. Vypočítame tvar dráhy a obežnú dobu planéty, o ktorej vieme, že v okamihu, keď ju pozorujeme, je vo vzdialenosti $100 . 10^6$ km od stredu Slnka a že sa pohybuje rýchlosťou $2 . 10^6$ km/deň v smere, ktorý s jej sprievodičom vzťahujúcim sa na stred Slnka zviera uhol 120°. Pri počítaní budeme predpokladať, že vo vzdialenosti 10^8 km od stredu Slnka intenzita jeho gravitačného poľa je 0,01 m/s².

Riešenie: Poloha a súčasná rýchlosť určuje dvojnásobok absolútnej hodnoty plošnej rýchlosti planéty, $C = r_0 v_0 \sin \alpha_0 = 10^{11} \dfrac{2 . 10^9}{24 . 3600} \dfrac{\sqrt{3}}{2} = 2 . 10^{15}\ \mathrm{m^2/s}$.

Vo vzdialenosti r_0 intenzita gravitačného poľa Slnka je $\varkappa \dfrac{M}{r_0^2}$, teda $\varkappa M =$ $= 10^{22} . 0{,}01\ \mathrm{m^3/s^2} = 10^{20}\ \mathrm{m^3 s^{-2}}$.

V rovnici (1) vystupujúca konštanta k je v našom prípade $k = \varkappa M m$, teda

$$\frac{k}{m} = \varkappa M = 10^{20}\ \mathrm{m^3\ s^{-2}}.$$

Eliminovaním φ_0 zo vzorcov vyjadrujúcich r_0 a α_0 dostávame

$$A = \frac{1}{r_0}\sqrt{\frac{1}{tg^2\alpha_0} + \left(\frac{k}{m}\frac{r_0}{C^2} - 1\right)^2} = 10^{-11}\sqrt{\frac{1}{3} + \left(10^{20}\frac{10^{11}}{4 . 10^{30}} - 1\right)^2}\ m^{-1} = 1{,}61 . 10^{-11} m^{-1}$$

Postupne teda vychodí: podľa vzorca (10) $p = \dfrac{1}{A} = 0{,}62 . 10^{11}$ m, podľa vzorca (9) $\varepsilon = A \dfrac{m}{k} C^2 = 1{,}61 . 10^{-11} . 10^{-20} . 4 . 10^{30} = 0{,}644$ a teda $\varepsilon p \doteq 4 . 10^{10}$ m. Podľa týchto výsledkov hľadaná dráha je elipsa s polosami

$$a = \frac{\varepsilon p}{1 - \varepsilon^2} = \frac{4 . 10^{10}}{0{,}585} m = 6{,}83 . 10^{10}\ \mathrm{m} = 68{,}3 . 10^6\ \mathrm{km}$$

$$b = \frac{\varepsilon p}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}} = 52{,}2 . 10^6\ \mathrm{km}$$

a obežná doba je

$$T = \frac{\pi a b}{C/2} = 132 \text{ dní}$$

3. DYNAMIKA SÚSTAVY HMOTNÝCH BODOV

3.1. Ťažisko. Bod T na spojnici dvoch hmotných bodov, ktorý túto spojnicu delí v obrátenom pomere ich hmôt, nazýva sa *ťažisko (hmotný stred)* týchto bodov. Podľa *obr. 3.1* je

$$A_1T : A_2T = m_2 : m_1,$$

$$A_1T : A_1A_2 = m_2 : (m_1 + m_2)$$

$$A_1T = A_1A_2 \frac{m_2}{m_1 + m_2}$$