Vyplýva z nich

$$\dot{x} = \frac{lp_x - p_\varphi}{Ml}, \qquad \dot{\varphi} = \frac{M + m}{Mml^2} p_\varphi - \frac{1}{Ml} p_x$$

Energia zariadenia preto je

$$E = \frac{1}{2} \frac{(p_x l - p_\varphi)^2}{Ml^2} + \frac{1}{2} \frac{p_\varphi^2}{ml^2} + mgl(1 - \cos\varphi)$$

Preto

$$\dot{p}_x = -\frac{\partial E}{\partial x} = 0, \qquad \dot{p}_\varphi = -\frac{\partial E}{\partial \varphi} = -mgl \sin\varphi \doteq -mgl\varphi$$

Spojením týchto rovníc s rovnicami (a) a (b) dostaneme rovnice

$$(M + m)\,\ddot{x} + ml\ddot{\varphi} = 0$$

$$ml\ddot{x} + ml^2\ddot{\varphi} = -mgl\varphi$$

totožné s rovnicami (a) a (b) z príkladu v predchádzajúcom článku.

Všimnime si, že sme pri riešení úlohy nepoužili druhé Hamiltonove rovnice. Je to dôsledok toho, že tieto rovnice nevyjadrujú nijakú fyzikálnu zákonitosť, lebo ani pri ich odvodzovaní sme nijakú fyzikálnu zákonitosť nepoužili. Vyplývajú z definície Hamiltonovej funkcie a zovšeobecnených hybností. Používajú sa vtedy, keď je energia sústavy priamo daná ako funkcia zovšeobecnených súradníc, hybností a času. V tom prípade predstavujú rovnice pre výpočet hybností, potrebných na dosadenie do prvých rovníc.

3.10. Hamiltonov princíp. Pri pohybe sústavy hmotných bodov za účinku daných hnacích a väzbových síl polohové vektory jednotlivých hmotných bodov sú určité funkcie času. Pre každý čas t zvoľme si ich virtuálne zmeny $\delta \mathbf{r}_i$. Potom aj tieto budú funkciami času, a preto funkciami času budú aj mysleným spôsobom zmenené (variované) polohové vektory $\mathbf{r}' = \mathbf{r}_i + \delta \mathbf{r}_i$.

Nech sú hnacie sily v sústave hmotných bodov konzervatívne. V tom prípade princíp virtuálnych posunutí vyjadruje rovnica

$$\sum (\operatorname{grad}_i U + m_i \mathbf{a}_i) \,.\, \delta \mathbf{r}_i = 0$$

Vyplýva z nej

$$\sum m_i \mathbf{a}_i \,.\, \delta \mathbf{r}_i = -\sum \operatorname{grad}_i U \,.\, \delta \mathbf{r}_i = -\delta U \tag{a}$$

Člen $m_i \mathbf{a}_i \,.\, \delta \mathbf{r}_i$ môžeme upraviť takto

$$m\mathbf{a} \,.\, \delta \mathbf{r} = m \frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t} \,.\, (\mathbf{r}' - \mathbf{r}) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} (m\mathbf{v} \,.\, \delta \mathbf{r}) - m\mathbf{v} \left(\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}'}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t} \right) =$$

$$= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} (m\mathbf{v} \,.\, \delta \mathbf{r}) - m\mathbf{v} \,.\, \delta \mathbf{v} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} (m\mathbf{v} \,.\, \delta \mathbf{r}) - \delta \frac{1}{2} m v^2$$

Rovnica (a) má preto tvar

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \sum m_i v_i \,.\, \delta \mathbf{r}_i = \delta(K - U) = \delta L$$

Zvoľme virtuálne posunutia tak, aby sa rovnali nule v čase t_0 aj v čase t_1 a integrujme predchádzajúcu rovnicu podľa času v tomto intervale. Dostaneme

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} L \,\mathrm{d}t = \int_{t_0}^{t_1} \mathrm{d} \left(\sum m_i \mathbf{v}_i \,.\, \delta \mathbf{r}_i \right) = 0$$

lebo v časoch t_0 a t_1 virtuálne posunutia podľa predpokladu sa rovnajú nule. Rovnica

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} L \,\mathrm{d}t = 0 \tag{1}$$

vyjadruje *Hamiltonov princíp.* Integrál $S = \int_{t_0}^{t_1} L \,\mathrm{d}t$ sa nazýva účinok pri pohybe sústavy s konzervatívnymi silami. Po zavedení tohto označenia Hamiltonov princíp možno vyjadriť rovnicou

$$\delta S = 0 \tag{2}$$

Podľa tejto rovnice mechanické deje za pôsobenia konzervatívnych síl sa odohrávajú tak, že pri nich má účinok extrémnu hodnotu. Možno dokázať, že týmto extrémom je minimum. Pre túto okolnosť sa Hamiltonov princíp nazýva aj *princíp najmenšieho účinku.* V optike sa oboznámime s *Fermatovým princípom*, ktorý sa svojím obsahom, matematickým vyjadrením aj významom veľmi podobá Hamiltonovmu princípu.

4. DYNAMIKA TUHÉHO TELESA

4.1. Pojem tuhého telesa. Telesá, ako sa s nimi stretávame v prírode, sú viac alebo menej usporiadané súbory atómov, molekúl a ionov, medzi ktorými účinkujú tzv. vnútorné sily, závislé od ich vzájomnej vzdialenosti. Veľkosť a povaha týchto síl spôsobuje, že aj pri rovnakej teplote a za rovnakého vonkajšieho tlaku preukazujú telesá aj zo stránky mechanickej rozličné vlastnosti: nerovnako sa na nich prejavujú účinky vonkajších síl. Teleso nazývame *pevným*, ak jeho objem alebo tvar môžeme podstatne zmeniť len za použitia pomerne veľkých síl.