

3.2. Pohybové rovnice sústavy hmotných bodov. Z n hmotných bodov s hmotnosťami $m_1, m_2, \dots, m_n$ ktorékoľvek dva nech účinkujú na seba vnútornými silami, ktoré podľa princípu akcie a reakcie účinkujú v tej istej priamke, zhodujú sa v absolútnych hodnotách a sú opačných smerov. Hmotný bod j -tý nech účinkuje na hmotný bod i -tý silou $\mathbf{f}_{ji}$, hmotný bod i -tý na hmotný bod j -tý silou $\mathbf{f}_{ij} = -\mathbf{f}_{ji}$. Okrem vnútorných síl nech účinkujú na jednotlivé hmotné body aj vonkajšie sily, na bod i -tý sila $\mathbf{f}_i$. Na i -tý bod sústavy účinkuje teda sila $\mathbf{f}_i + \mathbf{f}_{1i} + \mathbf{f}_{2i} + \dots + \mathbf{f}_{ni}$, pričom $\mathbf{f}_{ii} = 0$, a udeľuje mu zrýchlenie $\mathbf{a}_i$, ktoré splňuje rovnicu

$$\mathbf{f}_i + \sum_j \mathbf{f}_{ji} = m_i \mathbf{a}_i$$

Sčítaním týchto rovníc, napísaných pre každý z n hmotných bodov, dostávame rovnicu

$$\sum_i \mathbf{f}_i + \sum_i \sum_j \mathbf{f}_{ji} = \sum_i m_i \mathbf{a}_i$$

alebo, keďže súčet všetkých vnútorných síl sa rovná nule, $\sum_i \sum_j \mathbf{f}_{ji} = 0$, rovnicu

$$\mathbf{F} = \sum \mathbf{f}_i = \sum m_i \mathbf{a}_i$$

kde $\mathbf{F}$ je súčet všetkých vonkajších síl.

V tejto rovnici vystupujúce zrýchlenie $\mathbf{a}_i$ môžeme napísať ako deriváciu rýchlosti podľa času. Máme potom

$$\mathbf{F} = \sum m_i \mathbf{a}_i = \sum m_i \frac{d\mathbf{v}_i}{dt} = \frac{d}{dt} \sum m_i \mathbf{v}_i = \frac{d\mathbf{H}}{dt}$$

t. j.

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{H}}{dt} \quad (1)$$

keď sme súčet hybností jednotlivých hmotných bodov, nazývaný celkovou hybnosťou sústavy, označili symbolom $\mathbf{H}$, takže

$$\mathbf{H} = \sum m_i \mathbf{v}_i$$

Podľa vzorca (1), ak na sústavu hmotných bodov neúčinkujú nijaké vonkajšie sily, hybnosť sústavy zostáva nezmenená.

Rovnica (1) je *1. pohybová rovnica sústavy hmotných bodov*. Hovorí: *Súčet všetkých vonkajších síl pôsobiacich na jednotlivé body sústavy sa rovná derivácii celkovej hybnosti sústavy podľa času.*

Keďže rovnicu (1) môžeme písať aj v tvare $\mathbf{F} dt = d\mathbf{H}$, alebo po integrácii v tvare $\int \mathbf{F} dt = \mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1$, ktorý hovorí, že impulz súčtu všetkých vonkajších

síl sa rovná zväčšeniu celkovej hybnosti sústavy, rovnica (1) nazýva sa aj *1. vetou impulzovou*.

S rovnicou (1), s *1. vetou impulzovou*, rovnocennú rovnicu dostaneme derivovaním rovnice (3.1.1), t. j. rovnice

$$\sum m_i \mathbf{r}_i = M \mathbf{r}^*$$

podľa času. Vychádza

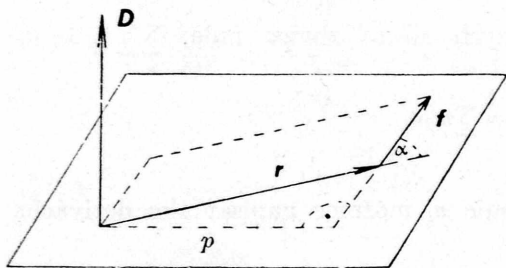
$$\sum m_i \mathbf{a}_i = M \mathbf{a}^*$$

alebo, keďže je $\sum m_i \mathbf{a}_i = \mathbf{F}$

$$\mathbf{F} = M \mathbf{a}^* \quad (2)$$

V tejto rovnici $\mathbf{F}$ je súčet všetkých vonkajších síl, M celková hmotnosť sústavy hmotných bodov a $\mathbf{a}^*$ zrýchlenie ťažiska. Nazýva sa vetou o ťažisku a hovorí:

Za účinku vonkajších síl ťažisko sústavy hmotných bodov sa pohybuje tak, ako keby celá hmota bola sústredená v ťažisku a všetky sily účinkovali v ťažisku.



Obr. 3.4

Keď sa súčet vonkajších síl rovná nule, potom $M \mathbf{a}^* = 0$, $\mathbf{a}^* = 0$ a $\mathbf{v}^* = \text{const.}$ Bez vonkajších síl, alebo keď ich súčet sa rovná nule, ťažisko sústavy hmotných bodov je v pokoji alebo v rovnomernom a priamočiarm pohybe.

V čl. 2.4 sme moment sily vzhľadom na bod definovali vzorcom (2.4.2)

$$\mathbf{D} = \mathbf{r} \times \mathbf{f}$$

Absolútna hodnota týmto vzorcom definovaného momentu sily vzhľadom na bod, $D = rf \sin \alpha = pf$, rovná sa súčinu absolútnej hodnoty sily a vzdialenosti vzťažného bodu od priamky, v ktorej sila pôsobí (obr. 3.4).

Obdobne sa definuje moment hybnosti hmotného bodu $\mathbf{G}$,

$$\mathbf{G} = \mathbf{r} \times \mathbf{H} = \mathbf{r} \times (m\mathbf{v}) \quad (3)$$

V prípade jediného hmotného bodu podľa vzorcov (1) a (3) je

$$\mathbf{D} = \mathbf{r} \times \mathbf{f} = \mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{H}}{dt} = \frac{d(\mathbf{r} \times \mathbf{H})}{dt} = \frac{d\mathbf{G}}{dt} \quad (4)$$

lebo

$$\frac{d(\mathbf{r} \times \mathbf{H})}{dt} = \frac{d(\mathbf{r} \times m\mathbf{v})}{dt} = \mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{H}}{dt} + \mathbf{v} \times m\mathbf{v} = \mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{H}}{dt}$$

pretože $\mathbf{v} \times (m\mathbf{v}) = m(\mathbf{v} \times \mathbf{v}) = 0$.

Moment na hmotný bod účinkujúcej sily sa rovná derivácii momentu jeho hybnosti podľa času.

Keď na i -tý bod sústavy účinkuje vonkajšia sila $\mathbf{f}_i$ a vnútorné sily $\mathbf{f}_{ji}$, podľa výsledku (4) je správna rovnica

$$\mathbf{r}_i \times \left(\mathbf{f}_i + \sum_j \mathbf{f}_{ji} \right) = \frac{d\mathbf{G}_i}{dt}$$

Sčítaním takýchto rovníc, napísaných pre všetky body sústavy, dostávame rovnicu

$$\sum_i \mathbf{r}_i \times \left(\mathbf{f}_i + \sum_j \mathbf{f}_{ji} \right) = \sum \frac{d\mathbf{G}_i}{dt}$$

alebo, pretože podľa rovnice (2.4.3) súčet momentov vždy dvoch vnútorných síl sa rovná nule (pozri tiež obr. 3.5),

$$\mathbf{D} = \sum \mathbf{r}_i \times \mathbf{f}_i = \frac{d\mathbf{G}}{dt} \quad (5)$$

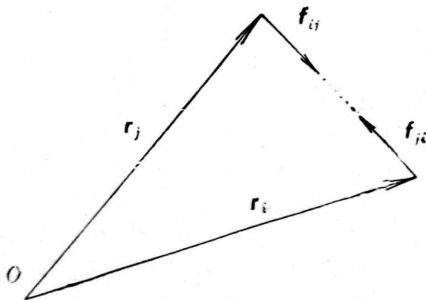
kde $\mathbf{D}$ značí teraz súčet momentov všetkých na sústavu účinkujúcich vonkajších síl a

$$\mathbf{G} = \sum \mathbf{G}_i = \sum \mathbf{r}_i \times \mathbf{H}_i = \sum \mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{v}_i$$

je celkový moment hybnosti sústavy.

Rovnica (5) je 2. *pohybová rovnica* sústavy hmotných bodov. Hovorí: *Súčet momentov vonkajších síl pôsobiacich na jednotlivé hmotné body sústavy sa rovná derivácii celkového momentu hybnosti sústavy podľa času.*

Keďže rovnicu (5) môžeme písať aj v tvare $\mathbf{D} dt = d\mathbf{G}$, alebo po integrácii v tvare $\int \mathbf{D} dt = \mathbf{G}_2 - \mathbf{G}_1$, ktorý hovorí, že impulz celkového momentu vonkajších síl účinkujúcich na sústavu sa rovná zväčšeniu celkového momentu hybnosti sústavy, rovnica (5) sa nazýva aj 2. *vetou impulzovou*.



Obr. 3.5

Poznámka: Z odvodenia rovnice (5) vyplýva, že momenty $\mathbf{D}$ a $\mathbf{G}$, v tejto rovnici sa síce vzťahujú na ľubovoľný, avšak obidva na ten istý v nejakom internacálnom systéme nehybný bod priestoru.

Úlohy na cvičenie

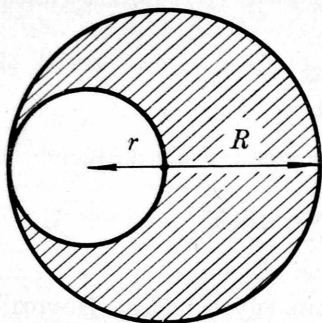
1. Kde je ťažisko rovnorodého plného kužela, ktorého kruhová základňa má polomer r a výška kužela je v ? $\left(z_0 = \frac{v}{4} \right)$

2. Kde je ťažisko: a) polovice plného kruhu, b) polovice rovnomernej plnej gule, ak ich polomery sú r ! $\left(y_0 = \frac{4r}{3\pi}, \quad z_0 = \frac{3r}{8}\right)$

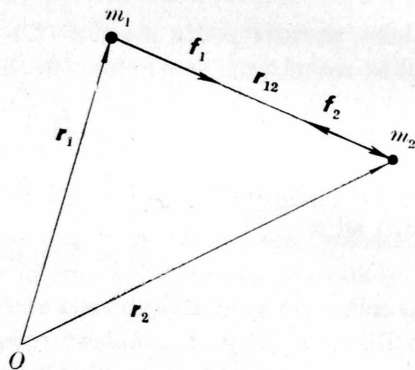
3. Vypočítajte polohy: a) do polkruhu zohnutého drôtu, b) prázdnej pologule, keď ich polomery sú r ! $\left(y_0 = \frac{2r}{\pi}, \quad y_0 = \frac{r}{2}\right)$

4. Kde je ťažisko plného valca, ktorého kruhová základňa má polomer r , jeho výška je $2r$ a je na jednej strane ukončený kuželom s výškou $2r$? $\left(y_0 = \frac{21}{16} r\right)$

5. Vypočítajte polohu ťažiska kruhovej dosky s polomerom R , s kruhovým výrezom podľa obr. 3.6, s polomerom $r = R/2$! ($r_0 = R/6$)



Obr. 3.6



Obr. 3.7

3.3. Potenciálna energia sústavy hmotných bodov. Majme na mysli sústavu n hmotných bodov s hmotnosťami m_1, m_2 až m_n v určitej vzájomnej polohe, pri ktorej ich polohové vektory vzhľadom na bod O zvolenej inerciálnej sústavy sú $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$ až $\mathbf{r}_n$. Každý z týchto n hmotných bodov pôsobí na každý zo zvyšujúcich bodov gravitačnou silou určenou Newtonovým gravitačným zákonom (2.12.11). Tieto sily pri prechode sústavy z polohy, pri ktorej polohový vektor i -tého hmotného bodu je $\mathbf{r}_i$, do polohy zvolenej za základnú, pri ktorej tento vektor je $\mathbf{r}_{i0}$, konajú určitú prácu. Jednoduchým výpočtom sa presvedčíme, že aj táto práca závisí len od danej a základnej polohy sústavy hmotných bodov a nie aj od tvaru čiar, pozdĺž ktorých sa jednotlivé hmotné body dostávajú zo svojich daných polôh do základných polôh.

Aby sme to dokázali, majme najprv na mysli len dva hmotné body s hmotnosťami m_1 a m_2 , ktorých polohové vektory nech sú $\mathbf{r}_1$ a $\mathbf{r}_2$. Podľa Newtonovho gravitačného zákona (obr. 3.7) na hmotný bod m_1 účinkuje gravitačná sila

$$\mathbf{f}_1 = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r_{21}^3} \mathbf{r}_{21} = \gamma \frac{m_1 m_2}{r_{12}^3} \mathbf{r}_{12} \quad \text{a na hmotný bod } m_2 \text{ sila } \mathbf{f}_2 = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r_{12}^3} \mathbf{r}_{12}.$$