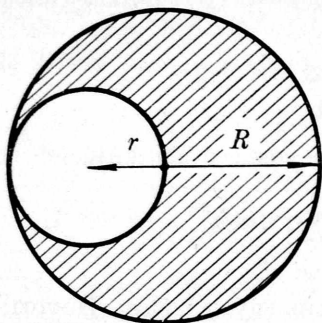


2. Kde je ťažisko: a) polovice plného kruhu, b) polovice rovnomernej plnej gule, ak ich polomery sú r ! $\left(y_0 = \frac{4r}{3\pi}, \quad z_0 = \frac{3r}{8}\right)$

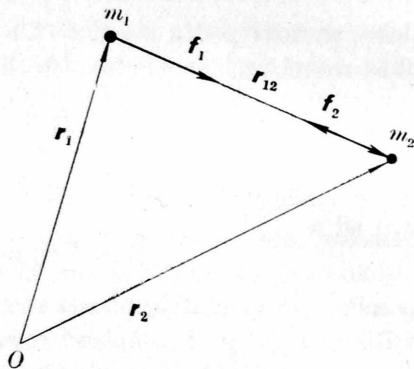
3. Vypočítajte polohy: a) do polkruhu zohnutého drôtu, b) prázdnej pologule, keď ich polomery sú r ! $\left(y_0 = \frac{2r}{\pi}, \quad y_0 = \frac{r}{2}\right)$

4. Kde je ťažisko plného valca, ktorého kruhová základňa má polomer r , jeho výška je $2r$ a je na jednej strane ukončený kuželom s výškou $2r$? $\left(y_0 = \frac{21}{16} r\right)$

5. Vypočítajte polohu ťažiska kruhovej dosky s polomerom R , s kruhovým výrezom podľa obr. 3.6, s polomerom $r = R/2$! ($r_0 = R/6$)



Obr. 3.6



Obr. 3.7

3.3. Potenciálna energia sústavy hmotných bodov. Majme na mysli sústavu n hmotných bodov s hmotnosťami m_1, m_2 až m_n v určitej vzájomnej polohe, pri ktorej ich polohové vektory vzhľadom na bod O zvolenej inerciálnej sústavy sú $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$ až $\mathbf{r}_n$. Každý z týchto n hmotných bodov pôsobí na každý zo zvyšujúcich bodov gravitačnou silou určenou Newtonovým gravitačným zákonom (2.12.11). Tieto sily pri prechode sústavy z polohy, pri ktorej polohový vektor i -tého hmotného bodu je $\mathbf{r}_i$, do polohy zvolenej za základnú, pri ktorej tento vektor je $\mathbf{r}_{i0}$, konajú určitú prácu. Jednoduchým výpočtom sa presvedčíme, že aj táto práca závisí len od danej a základnej polohy sústavy hmotných bodov a nie aj od tvaru čiar, pozdĺž ktorých sa jednotlivé hmotné body dostávajú zo svojich daných polôh do základných polôh.

Aby sme to dokázali, majme najprv na mysli len dva hmotné body s hmotnosťami m_1 a m_2 , ktorých polohové vektory nech sú $\mathbf{r}_1$ a $\mathbf{r}_2$. Podľa Newtonovho gravitačného zákona (obr. 3.7) na hmotný bod m_1 účinkuje gravitačná sila

$$\mathbf{f}_1 = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r_{21}^3} \mathbf{r}_{21} = \gamma \frac{m_1 m_2}{r_{12}^3} \mathbf{r}_{12} \quad \text{a na hmotný bod } m_2 \text{ sila } \mathbf{f}_2 = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r_{12}^3} \mathbf{r}_{12}.$$

Pri malej zmene polohy hmotných bodov m_1 a m_2 tieto sily konajú prácu $dA = \mathbf{f}_1 \cdot d\mathbf{r}_1 + \mathbf{f}_2 \cdot d\mathbf{r}_2 = -\kappa \frac{m_1 m_2}{r_{12}^3} \mathbf{r}_{12} \cdot (d\mathbf{r}_2 - d\mathbf{r}_1) = -\kappa \frac{m_1 m_2}{r_{12}^3} \mathbf{r}_{12} \cdot d\mathbf{r}_{12} = -\kappa \frac{m_1 m_2}{r_{12}^2} dr_{12}$, takže práca spojená s prechodom hmotných bodov m_1 a m_2 z ich daných polôh základných je

$$A = -\kappa m_1 m_2 \int_{r_{12}}^{(r_{12})_0} \frac{dr_{12}}{r_{12}^2} = -\kappa m_1 m_2 \left(\frac{1}{r_{12}} - \frac{1}{(r_{12})_0} \right) \quad (1)$$

Vzorec (1) môžeme napísať aj v tvare

$$A = -\frac{1}{2} \kappa \left[m_1 m_2 \left(\frac{1}{r_{12}} - \frac{1}{(r_{12})_0} \right) + m_2 m_1 \left(\frac{1}{r_{21}} - \frac{1}{(r_{12})_0} \right) \right]$$

z ktorého je bezprostredne zrejmé, že v prípade sústavy n hmotných bodov táto práca je

$$A = -\frac{1}{2} \kappa \sum_i \sum_j m_i m_j \left(\frac{1}{r_{ij}} - \frac{1}{(r_{ij})_0} \right), \quad j \neq i \quad (2)$$

lebo každý z n hmotných bodov účinkuje na každý ďalší gravitačnou silou.

Ako sme už pripomenuli, podľa vzorca (2) práca A je teda skutočne závislá len od danej a za základ zvolenej polohy sústavy hmotných bodov, lebo vo vzorci (2) vystupujú ako premenné veličiny vzájomné vzdialenosti jednotlivých hmotných bodov len v týchto dvoch polohách. Vzorec (2) vyjadruje aj tzv. *vzájomnú polohovú* (alebo *potenciálnu*) *energiu* sústavy n hmotných bodov. Budeme ju označovať písmenom U , takže bude

$$U = -\frac{1}{2} \kappa \sum_i \sum_j m_i m_j \left(\frac{1}{r_{ij}} - \frac{1}{(r_{ij})_0} \right), \quad j \neq i \quad (3)$$

Je dôležité si uvedomiť, že vzájomná polohová energia sústavy hmotných bodov nie je ešte určená ich vzájomnou polohou. Na to, aby bola určená, podľa vzorca (3) okrem danej vzájomnej polohy hmotných bodov musí byť udaná ešte určitá základná vzájomná poloha. V tom zmysle vzájomná polohová energia sústavy hmotných bodov je veličina *relatívna*.

V prípade, že za konečnú polohu sústavy zvolíme takú jej polohu, pri ktorej jednotlivé hmotné body sústavy sú v nekonečnej vzájomnej vzdialenosti, vzájomná polohová energia sústavy bude

$$U = -\frac{1}{2} \kappa \sum_i \sum_j \frac{m_i m_j}{r_{ij}} \quad j \neq i \quad (4)$$

Nazýva sa *absolútnou vzájomnou polohovou energiou* sústavy.

Keď hmotné body sú len dva, ich hmotnosti sú M a m a ich vzájomná vzdialenosť r , podľa vzorca (4) je táto energia

$$U = -\kappa \frac{Mm}{r} = m V \quad (5)$$

keď V je gravitačný potenciál buđený hmotným bodom s hmotnosťou M v mieste hmotného bodu s hmotnosťou m [pozri vzorec (2.13.8) na str. 87].

Podľa svojej definície, zrejme použiteľnej aj pre sústavu telies, *vzájomná polohová energia sústavy hmotných bodov sa rovná práci medzi nimi pôsobiacich gravitačných síl pri prechode sústavy z danej polohy do určitej ľubovoľne voliteľnej základnej polohy*. Keby sme naopak počítali prácu na sústavu pôsobiacich vonkajších síl, potrebnú na prenesenie sústavy hmotných bodov (alebo telies) zo základnej polohy (napr. z nekonečna) do danej polohy, dostali by sme rovnaký výsledok, lebo v tomto druhom prípade prácu konajú sily, ktoré gravitačné sily premáhajú, teda sily opačných smerov, a pracujú pozdĺž čiar opačne orientovaných. Môžeme preto povedať: *Vzájomná polohová energia sústavy hmotných bodov (alebo telies) sa rovná tiež práci vonkajších síl, potrebnej na prenesenie sústavy z jej polohy zvolenej za základ do polohy danej*.

Použitím vzorca (2.13.10), str. 87, vyjdrujúceho absolútny gravitačný potenciál v gravitačnom poli sústavy n hmotných bodov, vzorec (4), ktorý vyjadruje tzv. absolútnu vzájomnú potenciálnu energiu sústavy hmotných bodov, možno upraviť na tvar

$$U = -\frac{1}{2} \kappa \sum_i \sum_j \frac{m_i m_j}{r_{ij}} = \frac{1}{2} \sum_j \left(-\kappa \sum_i \frac{m_i}{r_{ij}} \right) m_j = \frac{1}{2} \sum m_j V_j \quad (6)$$

slovami: *Absolútna vzájomná potenciálna energia sústavy hmotných bodov sa rovná polovičnému súčtu súčínov hmoty jednotlivých hmotných bodov a absolútneho gravitačného potenciálu buđeného v ich miestach ostatnými hmotnými bodmi*.

Majme na mysli skalárnu funkciu polohy n bodov v priestore, $S = S(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_n)$. Vektorovú veličinu definovanú vzorcom

$$\frac{\partial S}{\partial x_v} \mathbf{i} + \frac{\partial S}{\partial y_v} \mathbf{j} + \frac{\partial S}{\partial z_v} \mathbf{k} = \left(\frac{\partial}{\partial x_v} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y_v} \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z_v} \mathbf{k} \right) S = \nabla_v S$$

budeme nazývať *gradientom funkcie S vzhľadom na v -tý bod* a označovať $\text{grad}_v S$, teda

$$\text{grad}_v S = \nabla_v S = \frac{\partial S}{\partial x_v} \mathbf{i} + \frac{\partial S}{\partial y_v} \mathbf{j} + \frac{\partial S}{\partial z_v} \mathbf{k}$$

Jednoduchým výpočtom sa presvedčíme o tom, že takto definovaný gradient vzájomnej gravitačnej potenciálnej energie n hmotných bodov, určenej

napríklad vzorcom (3.3.4), po zmene znamienka na príslušný bod pôsobiacej celkovej gravitačnej sily sa rovná

$$-\text{grad}_j U = -\kappa \sum_i m_i m_j \frac{1}{r_{ij}^3} \mathbf{r}_{ij} = \mathbf{f}_j \quad (7)$$

Na rozdiel od vzorca (3.3.4) súčiniteľ $1/2$ vo vzoreci (7) už nevystupuje, lebo v predchádzajúcom vzorci každý hmotný bod vystupuje v dvoch členoch.

3.4. Zákon o zachovaní energie. V čl. 2.14 sme odvodili zákon o zachovaní súčtu polohovej a ohybovej energie hmotného bodu pri jeho pohybe v gravitačnom poli hmotných telies, ktoré sú v inerciálnom systéme v pokoji. V čl. 2.15 sme dokázali jeho platnosť aj pre pohyb hmotného bodu v neinerciálnom silovom zemskom poli. Na tomto mieste najprv dokážeme, že je splnený aj pri pohybe sústavy voľných hmotných bodov za účinku medzi nimi pôsobiacich gravitačných síl.

Dôkaz je veľmi jednoduchý a v svojej podstate totožný s dôkazom platnosti tohto zákona pri pohybe voľného hmotného bodu v gravitačnom poli telies, ktoré sú v inerciálnom systéme v pokoji. Práca gravitačných síl, pôsobiacich v sústave n hmotných bodov pri voľnom prechode sústavy z polohy 1 do polohy 2 sa rovná zväčšeniu pohybovej energie sústavy aj zmenšeniu jej polohovej energie. Teda $K_2 - K_1 = U_1 - U_2$ alebo

$$U_1 + K_1 = U_2 + K_2 = \text{const}$$

slovami: *Pri pohybe voľných hmotných bodov len za účinku medzi nimi pôsobiacich gravitačných síl súčet vzájomnej polohovej a pohybovej energie sústavy ostáva konštantný.*

Predstavme si teraz, že sústava hmotných bodov sa skladá len z dvoch hmotných bodov, z hmotného bodu hmotnosti M , ktorá je podstatne väčšia, ako hmotnosť m druhého hmotného bodu. Na začiatku počítania času body s hmotami M a m nech majú vzhľadom na nejakú inerciálnu sústavu nulové rýchlosti a v tomto čase nech sa začínajú pohybovať len za účinku medzi nimi pôsobiacich príťažlivých gravitačných síl. Pretože tieto sily majú rovnaké absolútne hodnoty, po uplynutí ľubovoľného času t body M a m budú mať hybnosti s rovnakými absolútnymi hodnotami (pozri čl. 33). Preto, keď rýchlosti bodov M a m označíme pomocou písmen w a v , bude v každom čase splnená rovnica

$$Mw = mv \quad (a)$$