napríklad vzorcom (3.3.4), po zmene znamienka na príslušný bod pôsobiacej celkovej gravitačnej sily sa rovná

$$-\mathrm{grad}_j\, U = -\varkappa \sum_i m_i m_j \frac{1}{r_{ij}^3} \mathbf{r}_{ij} = \mathbf{f}_j \tag{7}$$

Na rozdiel od vzorca (3.3.4) súčiniteľ $^1/_2$ vo vzorci (7) už nevystupuje, lebo v predchádzajúcom vzorci každý hmotný bod vystupuje v dvoch členoch.

3.4. Zákon o zachovaní energie. V čl. 2.14 sme odvodili zákon o zachovaní súčtu polohovej a ohybovej energie hmotného bodu pri jeho pohybe v gravitačnom poli hmotných telies, ktoré sú v inerciálnom systéme v pokoji. V čl. 2.15 sme dokázali jeho platnosť aj pre pohyb hmotného bodu v neinerciálnom silovom zemskom poli. Na tomto mieste najprv dokážeme, že je splnený aj pri pohybe sústavy voľných hmotných bodov za účinku medzi nimi pôsobiacich gravitačných síl.

Dôkaz je veľmi jednoduchý a v svojej podstate totožný s dôkazom platnosti tohto zákona pri pohybe voľného hmotného bodu v gravitačnom poli telies, ktoré sú v inerciálnom systéme v pokoji. Práca gravitačných síl, pôsobiacich v sústave n hmotných bodov pri voľnom prechode sústavy z polohy 1 do polohy 2 sa rovná zväčšeniu pohybovej energie sústavy aj zmenšeniu jej polohovej energie. Teda $K_2 - K_1 = U_1 - U_2$ alebo

$$U_1 + K_1 = U_2 + K_2 = \mathrm{const}$$

slovami: *Pri pohybe voľných hmotných bodov len za účinku medzi nimi pôsobiacich gravitačných síl súčet vzájomnej polohovej a pohybovej energie sústavy ostáva konštantný.*

Predstavme si teraz, že sústava hmotných bodov sa skladá len z dvoch hmotných bodov, z hmotného bodu hmotnosti M, ktorá je podstatne väčšia, ako hmotnosť m druhého hmotného bodu. Na začiatku počítania času body s hmotami M a m nech majú vzhľadom na nejakú inerciálnu sústavu nulové rýchlosti a v tomto čase nech sa začínajú pohybovať len za účinku medzi nimi pôsobiacich príťažlivých gravitačných síl. Pretože tieto sily majú rovnaké absolútne hodnoty, po uplynutí ľubovoľného času t body M a m budú mať hybnosti s rovnakými absolútnymi hodnotami (pozri čl. 33). Preto, keď rýchlosti bodov M a m označíme pomocou písmen w a v, bude v každom čase splnená rovnica

$$Mw = mv \tag{a}$$

Vypočítame teraz pomer kinetických energií K a k bodov s hmotnosťami M a m v tom istom čase. Keď použijeme aj vzťah (a), dostávame

$$\frac{K}{k} = \frac{\frac{1}{2} M w^2}{\frac{1}{2} m v^2} = \frac{w}{v} = \frac{m}{M} \doteq 0$$

lebo podľa predpokladu je $M \gg m$.

Tento výsledok možno zrejme zovšeobecniť takto: Keď v sústave hmotných bodov (alebo telies) hmotnosť jedného z nich je podstatne väčšia, ako sú ostatné hmotnosti, pri pohybe sústavy len za účinku medzi nimi pôsobiacich gravitačných síl ich vzájomná polohová energia sa mení na pohybovú energiu hmotných bodov alebo telies len s malými hmotnosťami.

Pretože okrem toho v sústave, v ktorej hmotnosť jedného hmotného bodu alebo telesa podstatne prevláda nad hmotnosťami ostatných bodov, vzájomná polohová energia hmotných bodov alebo telies s malými hmotnosťami je zanedbateľne malá, možno v prípade takejto sústavy zaujať stanovisko, že polohové energie majú hmotné body a telesá len s malými hmotnosťami, pretože sú v gravitačnom poli hmotného bodu alebo telesa s veľmi veľkou hmotnosťou. Táto hmotnosť sa pri ich pohybe mení len na ich pohybovú energiu. Takto možno postupovať pri riešení pohybu aj ťažkých telies v gravitačnom poli našej Zeme, ktorá má veľmi veľkú hmotnosť.

Pri odvodzovaní zákona o zachovaní energie v sústave hmotných bodov sme predpokladali len účinok gravitačných síl. V skutočnosti len nebeské telesá spolu so svojím prípadným plynovým obalom pohybujú sa vo vzduchoprázdne. Vo fyzikálnej aj technickej praxi sa telesá zväčša pohybujú vo vzduchu, niekedy v kvapalinách a veľmi často sa šmýkajú po sebe. Vo všetkých týchto prípadoch účinkuje na pohybujúce sa tuhé telesá aj odpor plynného alebo kvapalného prostredia a tzv. sily trenia (čl. 4.12). Tieto sily spôsobujú, že sa súčet $U + K$ pri pohybe zmenšuje. Presvedčíme sa o tom na jednoduchom príklade. Majme na mysli pohyb voľného hmotného bodu v gravitačnom poli vytvorenom v nejakom plynnom alebo kvapalnom prostredí a počítajme elementárnu zmenu súčtu $U + K$. Pretože na pohybujúci sa hmotný bod účinkuje teraz okrem gravitačnej sily $\mathbf{f}_g$ aj odpor prostredia $\mathbf{f}_0$, dostávame skutočne:

$$\mathrm{d}(U + K) = \mathrm{d}U + \mathrm{d}K = -\mathbf{f}_g \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} + (\mathbf{f}_g + \mathbf{f}_0) \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = \mathbf{f}_0 \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} < 0$$

lebo odpor vzduchu je sila so smerom pohybu vždy nesúhlasne rovnobežná.

Zákon o zachovaní súčtu polohovej a pohybovej energie pri pohybe v gravitačnom poli je však len zvláštnym prípadom základného fyzikálneho zákona s omnoho širším obsahom, ktorý sa nazýva *zákonom o zachovaní energie* vôbec a ktorého platnosť potvrdzujú všetky naše doterajšie skúsenosti. Zákon o zachovaní energie hovorí: *Pri všetkých dejoch, ktoré sa v prírode odohrávajú, menia sa len formy energie, jej celkové množstvo ostáva však stále.* Preto zakaždým, ak pri pohybe telies v gravitačnom poli okrem energie polohovej a pohybovej vznikajú aj iné formy energie, súčet energie polohovej a pohybovej sa musí zmenšovať.

So zákonom o zachovaní energie sa budeme ešte zaoberať v termodynamike.

3.5. Klasifikácia väzieb v sústave hmotných bodov. Keď v sústave hmotných bodov každý z jej n bodov môže zaujať v priestore akúkoľvek polohu, hovoríme, že sústava je *voľná* alebo že nie je podrobená väzbám. Môže sa však stať, že to tak nie je. Napríklad vec môže byť tak zariadená, že niektorý z hmotných bodov nemôže opustiť danú plochu, alebo sa nemôže zmeniť vzájomná vzdialenosť dvoch bodov a pod. V tom prípade hovoríme, že v sústave hmotných bodov sú väzby.

Keď hmotný bod napr. nemôže opustiť plochu, ktorej tvar a poloha v priestore sa s časom nemenia, jeho súradnice v každom čase spĺňajú rovnicu $F(x, y, z) = 0$, ak táto plocha v čase nie je konštantná, súradnice bodu spĺňajú rovnicu $F(x, y, z, t) = 0$.

Úplne všeobecne väzby v sústave hmotných bodov, ktoré možno vyjadriť rovnicami

$$F(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \ldots) = 0 \tag{1}$$

alebo

$$F(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \ldots, t) = 0 \tag{2}$$

nazývajú sa *holonómne*, v prvom prípade sa nazývajú naviac aj *skleronómne* a v druhom *reonómne*.

Keď sa väzba v sústave hmotných bodov môže vyjadriť len v diferenciálnom tvare, t. j. vzťahom medzi súradnicami a ich možnými zmenami, nazývajú sa *neholonómne*.

V ďalších svojich úvahách sa budeme podrobnejšie zaoberať zákonmi pohybu a podmienkami rovnováhy sústav hmotných bodov podrobených len holonómnym väzbám, ktoré okrem toho budú najčastejšie skleronómne. Za sústavu hmotných bodov podrobenú väzbám môžeme považovať aj tuhé teleso, sústavu hmotných elementov, medzi ktorými pôsobia také veľké vnútorné sily, že je nimi vzájomný pohyb elementov tuhého telesa znemožnený.

3.6. Princíp virtuálnych posunutí. Každá malá a vzhľadom na prípadné väzby v danom okamihu možná zmena polohy hmotného bodu v sústave takýchto bodov sa nazýva jeho *virtuálnym posunutím* a označuje sa $\delta\mathbf{r}$.