s omnoho širším obsahom, ktorý sa nazýva *zákonom o zachovaní energie* vôbec a ktorého platnosť potvrdzujú všetky naše doterajšie skúsenosti. Zákon o zachovaní energie hovorí: *Pri všetkých dejoch, ktoré sa v prírode odohrávajú, menia sa len formy energie, jej celkové množstvo ostáva však stále.* Preto zakaždým, ak pri pohybe telies v gravitačnom poli okrem energie polohovej a pohybovej vznikajú aj iné formy energie, súčet energie polohovej a pohybovej sa musí zmenšovať.

So zákonom o zachovaní energie sa budeme ešte zaoberať v termodynamike.

3.5. Klasifikácia väzieb v sústave hmotných bodov. Keď v sústave hmotných bodov každý z jej n bodov môže zaujať v priestore akúkoľvek polohu, hovoríme, že sústava je *voľná* alebo že nie je podrobená väzbám. Môže sa však stať, že to tak nie je. Napríklad vec môže byť tak zariadená, že niektorý z hmotných bodov nemôže opustiť danú plochu, alebo sa nemôže zmeniť vzájomná vzdialenosť dvoch bodov a pod. V tom prípade hovoríme, že v sústave hmotných bodov sú väzby.

Keď hmotný bod napr. nemôže opustiť plochu, ktorej tvar a poloha v priestore sa s časom nemenia, jeho súradnice v každom čase spĺňajú rovnicu $F(x, y, z) = 0$, ak táto plocha v čase nie je konštantná, súradnice bodu spĺňajú rovnicu $F(x, y, z, t) = 0$.

Úplne všeobecne väzby v sústave hmotných bodov, ktoré možno vyjadriť rovnicami

$$F(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \ldots) = 0 \tag{1}$$

alebo

$$F(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \ldots, t) = 0 \tag{2}$$

nazývajú sa *holonómne*, v prvom prípade sa nazývajú naviac aj *skleronómne* a v druhom *reonómne*.

Keď sa väzba v sústave hmotných bodov môže vyjadriť len v diferenciálnom tvare, t. j. vzťahom medzi súradnicami a ich možnými zmenami, nazývajú sa *neholonómne*.

V ďalších svojich úvahách sa budeme podrobnejšie zaoberať zákonmi pohybu a podmienkami rovnováhy sústav hmotných bodov podrobených len holonómnym väzbám, ktoré okrem toho budú najčastejšie skleronómne. Za sústavu hmotných bodov podrobenú väzbám môžeme považovať aj tuhé teleso, sústavu hmotných elementov, medzi ktorými pôsobia také veľké vnútorné sily, že je nimi vzájomný pohyb elementov tuhého telesa znemožnený.

3.6. Princíp virtuálnych posunutí. Každá malá a vzhľadom na prípadné väzby v danom okamihu možná zmena polohy hmotného bodu v sústave takýchto bodov sa nazýva jeho *virtuálnym posunutím* a označuje sa $\delta\mathbf{r}$.

Zo skúsenosti vieme, že za pôsobenia daných, tzv. *hnacích síl*, jednotlivé hmotné body sústavy sa ináč pohybujú, keď sú v sústave väzby ako bez nich. Voľne pustené teleso napr. v silovom zemskom poli padá zvisle nadol, avšak keď ho položíme na naklonenú rovinu, skĺzne po nej. Z toho usudzujeme, že v dôsledku väzby v sústave hmotných bodov vznikajú sily, ktoré budeme nazývať *väzbovými*.

V jednoduchých prehľadných prípadoch vhodnou úvahou sa zvyčajne môžeme presvedčiť o tom, že súčet prác väzbových síl pri virtuálnych posunutiach bodov sústavy sa rovná nule. Pri väzbe hmotného bodu na pevnú čiaru alebo plochu, keď táto núti len hmotný bod k pohybu po sebe, ale ináč mu v pohybe neprekáža (hmotný bod pri svojom viazanom pohybe nemusí prekonávať trenie a iné podobné prekážky), väzbová sila je nepochybne na príslušnú čiaru alebo plochu kolmá. Z toho však vyplýva, že jej práca pri virtuálnom posunutí bodu pozdĺž danej čiary alebo v danej ploche sa rovná nule.

Keď dva hmotné body nemôžu zmeniť svoju vzájomnú vzdialenosť, podľa princípu akcie a reakcie pôsobia na seba rovnakými silami, ale s opačnými smermi. Na hmotný bod *1*, ktorého polohový vektor je $\mathbf{r}_1$, nech pôsobí väzbová sila $\mathbf{f}_{21}$, na hmotný bod *2* s polohovým vektorom $\mathbf{r}_2$ väzbová sila $\mathbf{f}_{12} = -\mathbf{f}_{21}$. Ich práca pri virtuálnom posunutí obidvoch bodov je

$$\delta A = \mathbf{f}_{21} \cdot \delta \mathbf{r}_1 + \mathbf{f}_{12} \cdot \delta \mathbf{r}_2 = \mathbf{f}_{21} \cdot (\delta \mathbf{r}_1 - \delta \mathbf{r}_2)$$

Keďže polohový vektor bodu *2* vzhľadom na bod *1* je

$$\mathbf{r}_{12} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1, \quad \text{je} \quad \delta \mathbf{r}_2 - \delta \mathbf{r}_1 = \delta \mathbf{r}_{12}$$

a teda

$$\delta A = \mathbf{f}_{21} \cdot (-\delta \mathbf{r}_{12}) = \mathbf{f}_{12} \cdot \delta \mathbf{r}_{12} = 0$$

lebo virtuálna zmena $\delta \mathbf{r}_{12}$ polohového vektora $\mathbf{r}_{12}$, ktorého absolútna hodnota je konštantná, je na spojnicu obidvoch hmotných bodov a tým aj na silu $\mathbf{f}_{12}$ kolmá.

Väzby hmotných bodov môžu byť aj veľmi zložité. Ak napriek tomu chceme vybudovať jednotnú teóriu rovnováhy a pohybu sústav hmotných bodov, nezostáva nám nič iného, ako poznatky pri rôznych väzbách zovšeobecniť. Týmto zovšeobecnením, ktoré má charakter samostatného základného fyzikálneho zákona, je veta:

Súčet prác väzbových síl pri virtuálnej zmene polohy bodov sústavy sa rovná nule, keď väzby pôsobiace v sústave sú ideálne hladké.

Nech je sústava hmotných bodov v pokoji. Potom súčet $\mathbf{f}_i$ hnacích síl a súčet $\mathbf{f}_i^*$ väzbových síl, pôsobiacich na i-tý hmotný bod, rovná sa nule

$$\mathbf{f}_i + \mathbf{f}_i^* = 0 \tag{1}$$

Znásobme každú z n takýchto rovníc príslušným virtuálnym, t. j. pri daných väzbách možným posunutím $\delta \mathbf{r}_i$ a utvorme ich súčet. Dostaneme

$$\sum (\mathbf{f}_i + \mathbf{f}_i^*) \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0$$

alebo, keďže podľa vyššie o väzbových silách vyslovenej vety $\Sigma \mathbf{f}_i^* \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0$, bude platiť

$$\sum \mathbf{f}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0 \tag{2}$$

Rovnica (2) je matematickým vyjadrením tzv. princípu virtuálnych posunutí, ktorý hovorí: *Keď je sústava hmotných bodov v rovnováhe, virtuálna práca hnacích síl sa rovná nule.*

Keď sú hnacie sily konzervatívne, ich virtuálna práca $\sum \mathbf{f}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i$ rovná sa zodpovedajúcemu zmenšeniu — δU potenciálnej energie sústavy. V tom prípade rovnica (2) je tiež

$$\delta U = 0 \tag{3}$$

Za rovnováhy v sústave hmotných bodov, na ktoré pôsobia konzervatívne sily, potenciálna energia sústavy má extrémnu hodnotu. Prenechávame čitateľovi dôkaz, že rovnováha je stabilná, keď pri nej U má minimálnu hodnotu a metastabilná, keď je to obrátene.

Práve odvodené podmienky rovnováhy sa vzťahujú nielen na sústavy diskrétnych hmotných bodov, ale aj na sústavy tuhých telies, lebo tieto, ako sme už predtým spomenuli v čl. 3.5, môžeme považovať za sústavu hmotných bodov s väzbami, ktoré znemožňujú zmenu ich vzájomnej polohy.

Príklad 1. Majme dvojramennú páku s ramenami r_1 a r_2, na koncoch ktorých nech pôsobia sily kolmé na smer páky f_1 a f_2. Podľa princípu virtuálnych posunutí za rovnováhy pri pootočení páky o uhol $\delta\alpha$ algebraický súčet prác síl f_1 a f_2 sa rovná nule, $f_2 r_2 \delta\alpha - f_1 r_1 \delta\alpha = 0$ alebo $f_1 r_1 = f_2 r_2$.

Príklad 2. Vypočítame tlakovú silu F, ktorú môžeme vyvinúť v ideálnom prípade pomocou skrutky so stúpaním závitov h, keď ňou otáčame dvojicou síl (pozri čl. 4.3) s momentom D.

Pri pootočení skrutky o uhol $\delta\alpha$ sily dvojice vykonajú prácu $2f\delta s = 2fr\delta\alpha = D\delta\alpha$. Sila pôsobiaca na vreteno proti jeho posunutiu vykoná súčasne zápornú prácu $-Fh\dfrac{\delta\alpha}{2\pi}$.

Z rovnice $D\delta\alpha - Fh\dfrac{\delta\alpha}{2\pi} = 0$ vyplýva $F = \dfrac{2\pi D}{h}$.

3.7. Lagrangeove rovnice prvého druhu. Majme na mysli sústavu n hmotných bodov, podrobenú m holonómnym väzbám. Keď sú hnacie a väzbové sily posobiace v sústave vo vzájomnej rovnováhe, pre každý z n hmotných bodov je splnená rovnica (3.6.1), $\mathbf{f}_i + \mathbf{f}_i^* = 0$, kde $\mathbf{f}_i$ je celková na i-tý bod pôsobiaca hnacia sila a $\mathbf{f}_i^*$ väzbová sila. Podľa d'Alembertovho princípu za pohybu