Znásobme každú z n takýchto rovníc príslušným virtuálnym, t. j. pri daných väzbách možným posunutím $\delta \mathbf{r}_i$ a utvorme ich súčet. Dostaneme

$$\sum (\mathbf{f}_i + \mathbf{f}_i^*) \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0$$

alebo, keďže podľa vyššie o väzbových silách vyslovenej vety $\Sigma \mathbf{f}_i^* \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0$, bude platiť

$$\sum \mathbf{f}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0 \tag{2}$$

Rovnica (2) je matematickým vyjadrením tzv. princípu virtuálnych posunutí, ktorý hovorí: *Keď je sústava hmotných bodov v rovnováhe, virtuálna práca hnacích síl sa rovná nule.*

Keď sú hnacie sily konzervatívne, ich virtuálna práca $\sum \mathbf{f}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i$ rovná sa zodpovedajúcemu zmenšeniu — δU potenciálnej energie sústavy. V tom prípade rovnica (2) je tiež

$$\delta U = 0 \tag{3}$$

Za rovnováhy v sústave hmotných bodov, na ktoré pôsobia konzervatívne sily, potenciálna energia sústavy má extrémnu hodnotu. Prenechávame čitateľovi dôkaz, že rovnováha je stabilná, keď pri nej U má minimálnu hodnotu a metastabilná, keď je to obrátene.

Práve odvodené podmienky rovnováhy sa vzťahujú nielen na sústavy diskrétnych hmotných bodov, ale aj na sústavy tuhých telies, lebo tieto, ako sme už predtým spomenuli v čl. 3.5, môžeme považovať za sústavu hmotných bodov s väzbami, ktoré znemožňujú zmenu ich vzájomnej polohy.

Príklad 1. Majme dvojramennú páku s ramenami r_1 a r_2, na koncoch ktorých nech pôsobia sily kolmé na smer páky f_1 a f_2. Podľa princípu virtuálnych posunutí za rovnováhy pri pootočení páky o uhol $\delta\alpha$ algebraický súčet prác síl f_1 a f_2 sa rovná nule, $f_2 r_2 \delta\alpha - f_1 r_1 \delta\alpha = 0$ alebo $f_1 r_1 = f_2 r_2$.

Príklad 2. Vypočítame tlakovú silu F, ktorú môžeme vyvinúť v ideálnom prípade pomocou skrutky so stúpaním závitov h, keď ňou otáčame dvojicou síl (pozri čl. 4.3) s momentom D.

Pri pootočení skrutky o uhol $\delta\alpha$ sily dvojice vykonajú prácu $2f\delta s = 2fr\delta\alpha = D\delta\alpha$. Sila pôsobiaca na vreteno proti jeho posunutiu vykoná súčasne zápornú prácu $-Fh\,\dfrac{\delta\alpha}{2\pi}$.
Z rovnice $D\delta\alpha - Fh\,\dfrac{\delta\alpha}{2\pi} = 0$ vyplýva $F = \dfrac{2\pi D}{h}$.

3.7. Lagrangeove rovnice prvého druhu. Majme na mysli sústavu n hmotných bodov, podrobenú m holonómnym väzbám. Keď sú hnacie a väzbové sily posobiace v sústave vo vzájomnej rovnováhe, pre každý z n hmotných bodov je splnená rovnica (3.6.1), $\mathbf{f}_i + \mathbf{f}_i^* = 0$, kde $\mathbf{f}_i$ je celková na i-tý bod pôsobiaca hnacia sila a $\mathbf{f}_i^*$ väzbová sila. Podľa d'Alembertovho princípu za pohybu sústavy nule sa rovná až súčet týchto síl a d'Alembertovej zotrvačnej sily $-m_i\mathbf{a}_i$, teda

$$\mathbf{f}_i + \mathbf{f}_i^* - m_i\mathbf{a}_i = 0 \tag{1}$$

Znásobme každú z n takýchto rovníc skalárne virtuálnym posunutím príslušného bodu a utvorme ich súčet. Dostaneme

$$\sum (\mathbf{f}_i - m_i\mathbf{a}_i) \,.\, \delta\mathbf{r}_i = 0 \tag{2}$$

lebo podľa zákona o väzbových silách celková práca väzbových síl pri virtuálnej zmene polohy bodov sústavy sa rovná nule. Rovnica (2) predstavuje princíp virtuálnych posunutí zovšeobecnený pre prípad pohybu sústavy.

Keby sústava bola sústavou voľných hmotných bodov, mala by $3n$ stupňov voľnosti svojho pohybu a všetky virtuálne posunutia $\delta\mathbf{r}_i$ by sme mohli ľubovoľne voliť. V tom prípade rovnica (2) by sa rozpadla na n rovníc tvaru $\mathbf{f}_i - m_i\mathbf{a}_i = 0$ alebo $\mathbf{f}_i = m_i\mathbf{a}_i$. To je však triviálny výsledok, ktorý sme mohli napísať priamo.

Keď je však v sústave m väzieb, jej stupeň voľnosti je $s = 3n - m$ a virtuálne posunutia $\delta\mathbf{r}_i$ nemôžeme všetky ľubovoľne voliť. V tom prípade podľa J. L. Lagrangea[1]) možno postupovať takto:

Keď sú väzbové podmienky vyjadrené m rovnicami $F_k(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \ldots, \mathbf{r}_n, t) = 0$, virtuálne posunutia spĺňajú rovnice

$$\sum_i \operatorname{grad}_i F_k \,.\, \delta\mathbf{r}_i = 0$$

kde $\operatorname{grad}_i F_k$ je vektorová veličina definovaná už v čl. 3.3.

Pripočítaním λ_k násobkov m takýchto rovníc k rovnici (2) dostaneme rovnicu

$$\sum_{i=1}^{n} (\mathbf{f}_i - m_i\mathbf{a}_i) \,.\, \delta\mathbf{r}_i + \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \sum_{i=1}^{n} \operatorname{grad}_i F_k \,.\, \delta\mathbf{r}_i = 0$$

t. j.

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\mathbf{f}_i + \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \operatorname{grad}_i F_k - m_i\mathbf{a}_i\right) .\, \delta\mathbf{r}_i = 0 \tag{a}$$

[1]) Joseph Louis Lagrange (1736—1813), francúzsky matematik, predseda komisie pre vybudovanie metrickej sústavy mier a váh.

alebo

$$\sum_{i=1}^{n}\left[\left(f_{ix} + \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \frac{\partial F_k}{\partial x_i} - m_i \frac{\mathrm{d}^2 x_i}{\mathrm{d}t^2}\right)\delta x_i + \right.$$

$$+ \left(f_{iy} + \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \frac{\partial F_k}{\partial y_i} - m_i \frac{\mathrm{d}^2 y_i}{\mathrm{d}t^2}\right)\delta y_i +$$

$$\left. + \left(f_{iz} + \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \frac{\partial F_k}{\partial z_i} - m_i \frac{\mathrm{d}^2 z_i}{\mathrm{d}t^2}\right)\delta z_i\right] = 0 \qquad \text{(b)}$$

Ľavá strana tejto rovnice predstavuje súčet $3n$ členov. Vystupuje v nich spolu $3n$ virtuálnych zmien súradníc, z ktorých však len $3n - m$, napr. prvých $3n - m$, môžeme ľubovoľne voliť, keď koeficienty λ_k sme už zvolili tak isto ľubovoľne. Keď však koeficienty λ_k, ktorých je m, zvolíme tak, aby sa trojčleny v zátvorkách napr. v posledných m členoch ľavej strany rovnice (b) rovnali nule, bude táto rovnica splnená, aj keď zmeny súradníc všetkých n bodov sústavy zvolíme ľubovoľne. To však znamená, že jestvujú také koeficienty λ_k, pri ktorých rovnica (a) je splnená nielen vtedy, keď v nej $\delta\boldsymbol{r}_i$ označujú virtuálne posunutia, ale aj vtedy, keď tieto nahradíme akýmikoľvek posunutiami. Z toho vyplýva, že sú správne rovnice

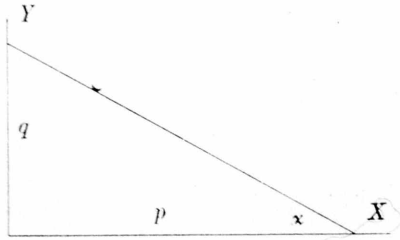
$$\boldsymbol{f}_i + \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \operatorname{grad}_i F_k = m_i \boldsymbol{a}_i \qquad (3)$$

Nazývajú sa *Lagrangeove rovnice prvého druhu*. Je ich n a spolu s m väzbovými rovnicami pri daných začiatočných podmienkach umožňujú vypočítať priebeh pohybu každého z n hmotných bodov sústavy, ako aj m koeficientov λ_k.

Z porovnania rovníc (1) a (3) vyplýva, že súčet vystupujúci v rovnici (3) predstavuje celkovú, na i-tý hmotný bod pôsobiacu väzbovú silu, čiže

$$\boldsymbol{f}_i^* = \sum_{k=}^{m} \lambda_k \operatorname{grad}_i F_k \qquad (4)$$

Príklad 1. Pomocou Lagrangeovej rovnice prvého druhu odvodíme priebeh pohybu hmotného bodu po naklonenej rovine za účinku jeho tiaže. O naklonenej rovine v tomto príklade budeme predpokladať, že sa nepohybuje. Vektorovú Lagrangeovu rovnicu (3) môžeme rozpísať na tri skalárne rovnice



Obr. 3.8

$$f_x + \lambda \frac{\partial F}{\partial x} = m\ddot{x}$$

$$f_y + \lambda \frac{\partial F}{\partial y} = m\ddot{y}$$

$$f_z + \lambda \frac{\partial F}{\partial z} = m\ddot{z}$$

Pri voľbe súradnicových osí podľa *obr. 3.8* je $f_x = 0$, $f_y = -mg$, $f_z = 0$. Rovnica naklonenej roviny v našom prípade je $y - kx - q = 0$ alebo $y + (\mathrm{tg}\,\alpha)\,x - q = 0$, takže $\frac{\partial F}{\partial x} = \mathrm{tg}\,\alpha$, $\frac{\partial F}{\partial y} = 1$. Podľa týchto výsledkov prvé dve z predchádzajúcich troch rovníc sú

$$\lambda\,\mathrm{tg}\,\alpha = m\ddot{x}, \qquad a_x = \frac{\lambda\,\mathrm{tg}\,\alpha}{m}$$

$$-mg + \lambda = m\ddot{y}, \qquad a_y = \frac{-mg + \lambda}{m}$$

Vyplýva z nich

$$x = \frac{1}{2}\,a_x t^2 = \frac{1}{2}\,\frac{\lambda\,\mathrm{tg}\,\alpha}{m}\,t^2$$

$$y = q + \frac{1}{2}\,a_y t^2 = q + \frac{1}{2}\,\frac{-mg + \lambda}{m}\,t^2$$

keď sme zvolili začiatočné podmienky takto: $x_0 = 0$, $y_0 = q$, $(\dot{x})_0 = 0$, $(\dot{y})_0 = 0$. Dosadením získaných vyjadrení súradníc do rovnice naklonenej roviny vychádza

$$q + \frac{1}{2}\,\frac{-mg + \lambda}{m}\,t^2 + \mathrm{tg}\,\alpha \,.\, \frac{1}{2}\,\frac{\lambda\,\mathrm{tg}\,\alpha}{m}\,t^2 - q = 0$$

$$-mg + \lambda = -\lambda\,\mathrm{tg}^2\,\alpha$$

$$\lambda(1 + \mathrm{tg}^2\alpha) = mg$$

$$\lambda = mg\cos^2\alpha$$

Súradnice pohybujúceho sa bodu ako funkcie času teda budú

$$x = \frac{1}{2}\,g\sin\alpha\cos\alpha\,t^2$$

$$y = q + \frac{1}{2}\,(-g + g\cos^2\alpha)\,t^2 = q - \frac{1}{2}\,g\sin^2\alpha\,t^2$$

Pre dĺžku dráhy prebehnutej za čas t vychádza

$$s = \sqrt{x^2 + (y_0 - y)^2} = \frac{1}{2}\,gt^2\sqrt{\sin^2\alpha\cos^2\alpha + \sin^4\alpha} = \frac{1}{2}\,g\sin\alpha\,t^2$$

čo znamená, že zrýchlenie pozdĺž naklonenej roviny je $a = g\sin\alpha$. Tento výsledok sme však mohli dostať aj jednoduchšie rozkladom tiaže hmotného bodu mg na zložku kolmú na naklonenú rovinu $mg\cos\alpha$ a zložku s ňou rovnobežnú $mg\sin\alpha$.

Príklad 2. Teraz budeme riešiť pohyb hmotného bodu po naklonenej rovine, teraz však o nej budeme predpokladať, že sa pohybuje v smere osi X so zrýchlením γ a jej rýchlosť na začiatku počítania času sa rovnala nule. Pre tento účel rovnicu naklonenej roviny podľa *obr. 3.8* napíšeme v tvare

$$y + (\operatorname{tg} \alpha)\, x - p \operatorname{tg} \alpha = 0 \text{ alebo, keďže teraz } p = p_0 + \frac{1}{2} \gamma t^2,$$

$$y + \operatorname{tg} \alpha\left(x - p_0 - \frac{1}{2} \gamma t^2\right) = 0 \tag{a}$$

Teda opäť $\dfrac{\partial F}{\delta x} = \operatorname{tg} \alpha$, $\dfrac{\partial F}{\delta y} = 1$, takže aj pre súradnice pohybujúceho sa bodu dostaneme formálne rovnaké výsledky ako v príklade 1,

$$x = \frac{1}{2} \frac{\lambda \operatorname{tg} \alpha}{m} t^2, \qquad y = p_0 \operatorname{tg} \alpha + \frac{1}{2} \frac{-mg + \lambda}{m} t^2$$

Konštantu λ musíme však teraz vypočítať z rovnice (a), t. j. z rovnice

$$p_0 \operatorname{tg} \alpha + \frac{1}{2} \frac{-mg + \lambda}{m} t^2 = -\operatorname{tg} \alpha \left(\frac{1}{2} \frac{\lambda \operatorname{tg} \alpha}{m} t^2 - p_0 - \frac{1}{2} \gamma t^2\right)$$

Dostaneme

$$\lambda = m(g + \gamma \operatorname{tg} \alpha) \cos^2 \alpha$$

takže

$$x = \frac{1}{2} (g + \gamma \operatorname{tg} \alpha) \sin \alpha \cos \alpha\, t^2$$

$$y = p_0 \operatorname{tg} \alpha + \frac{1}{2} [-g + (g + \gamma \operatorname{tg} \alpha) \cos^2 \alpha]\, t^2$$

Keď nechceme, aby bod po naklonenej rovine klesal, musí byť $-g + g \cos^2 \alpha + \gamma \sin \alpha \cos \alpha = 0$, z čoho $\gamma = g \operatorname{tg} \alpha$. Tento výsledok sme dostali už v 2. príklade článku 2.7, a to použitím d'Alembertovho princípu.

3.8. Lagrangeove rovnice druhého druhu. Skalárne veličiny určujúce jednoznačne polohu bodu v priestore nazývajú sa jeho súradnicami. Podobne skalárne veličiny, určujúce jednoznačne polohy jednotlivých bodov sústavy hmotných bodov v priestore, nazývajú sa (zovšeobecnenými) súradnicami sústavy. Keď v sústave nie sú väzby, jej súradnice (budeme ich označovať q_i) sú totožné so súborom ľubovoľných súradníc jej jednotlivých bodov. Keď však v sústave n hmotných bodov je m holonómnych väzieb, takže stupeň voľnosti sústavy je $s = 3n - m$, počet *zovšeobecnených* súradníc sústavy je len s. Nemusia to však nevyhnutne byť súradnice niektorých bodov sústavy, ale môžu to byť aj iné údaje, ako napr. vzájomné vzdialenosti niektorých bodov sústavy, uhly zovreté ich spojnicami a pod.

Vlastné súradnice jednotlivých bodov sústavy a tým aj ich polohové vektory sú funkcie zovšeobecnených súradníc (a ak sa v sústave jestvujúce holonómne