Príklad 2. Teraz budeme riešiť pohyb hmotného bodu po naklonenej rovine, teraz však o nej budeme predpokladať, že sa pohybuje v smere osi X so zrýchlením γ a jej rýchlosť na začiatku počítania času sa rovnala nule. Pre tento účel rovnicu naklonenej roviny podľa *obr. 3.8* napíšeme v tvare

$$y + (\operatorname{tg}\alpha)\,x - p\operatorname{tg}\alpha = 0 \text{ alebo, keďže teraz } p = p_0 + \frac{1}{2}\gamma t^2,$$

$$y + \operatorname{tg}\alpha(x - p_0 - \frac{1}{2}\gamma t^2) = 0 \tag{a}$$

Teda opäť $\dfrac{\partial F}{\delta x} = \operatorname{tg}\alpha$, $\dfrac{\partial F}{\delta y} = 1$, takže aj pre súradnice pohybujúceho sa bodu dostaneme formálne rovnaké výsledky ako v príklade 1,

$$x = \frac{1}{2}\frac{\lambda\operatorname{tg}\alpha}{m}t^2, \qquad y = p_0\operatorname{tg}\alpha + \frac{1}{2}\frac{-mg+\lambda}{m}t^2$$

Konštantu λ musíme však teraz vypočítať z rovnice (a), t. j. z rovnice

$$p_0\operatorname{tg}\alpha + \frac{1}{2}\frac{-mg+\lambda}{m}t^2 = -\operatorname{tg}\alpha\left(\frac{1}{2}\frac{\lambda\operatorname{tg}\alpha}{m}t^2 - p_0 - \frac{1}{2}\gamma t^2\right)$$

Dostaneme

$$\lambda = m(g + \gamma\operatorname{tg}\alpha)\cos^2\alpha$$

takže

$$x = \frac{1}{2}(g + \gamma\operatorname{tg}\alpha)\sin\alpha\cos\alpha\, t^2$$

$$y = p_0\operatorname{tg}\alpha + \frac{1}{2}[-g + (g + \gamma\operatorname{tg}\alpha)\cos^2\alpha]\,t^2$$

Keď nechceme, aby bod po naklonenej rovine klesal, musí byť $-g + g\cos^2\alpha + \gamma\sin\alpha\cos\alpha = 0$, z čoho $\gamma = g\operatorname{tg}\alpha$. Tento výsledok sme dostali už v 2. príklade článku 2.7, a to použitím d'Alembertovho princípu.

3.8. Lagrangeove rovnice druhého druhu. Skalárne veličiny určujúce jednoznačne polohu bodu v priestore nazývajú sa jeho súradnicami. Podobne skalárne veličiny, určujúce jednoznačne polohy jednotlivých bodov sústavy hmotných bodov v priestore, nazývajú sa (zovšeobecnenými) súradnicami sústavy. Keď v sústave nie sú väzby, jej súradnice (budeme ich označovať q_i) sú totožné so súborom ľubovoľných súradníc jej jednotlivých bodov. Keď však v sústave n hmotných bodov je m holonómnych väzieb, takže stupeň voľnosti sústavy je $s = 3n - m$, počet *zovšeobecnených* súradníc sústavy je len s. Nemusia to však nevyhnutne byť súradnice niektorých bodov sústavy, ale môžu to byť aj iné údaje, ako napr. vzájomné vzdialenosti niektorých bodov sústavy, uhly zovreté ich spojnicami a pod.

Vlastné súradnice jednotlivých bodov sústavy a tým aj ich polohové vektory sú funkcie zovšeobecnených súradníc (a ak sa v sústave jestvujúce holonómne väzby s časom menia), aj času. Teda v prípade holonómnych väzieb vo všeobecnosti platí

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i(q_1, q_2, \ldots, q_j, \ldots, q_s, t)$$

Podľa zovšeobecneného princípu virtuálnych posunutí (rovnica 3.7.2) je

$$\sum_{i=1}^{n} (\mathbf{f}_i - m_i \mathbf{a}_i) \,.\, \delta \mathbf{r}_i = 0 \tag{1}$$

Keďže

$$\delta \mathbf{r}_i = \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j$$

rovnicu (1) možno upraviť na tvar

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{s} (\mathbf{f}_i - m_i \mathbf{a}_i) \,.\, \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j = 0 \tag{2}$$

Pretože virtuálne zmeny (δq_j) zovšeobecnených súradníc (každá zmena zovšeobecnenej súradnice je možná) sú od seba nezávislé, z rovnice (2) vyplýva platnosť s rovníc

$$\sum_i (\mathbf{f}_i - m_i \mathbf{a}_i) \,.\, \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} = 0$$

ktoré môžeme napísať aj takto

$$\sum_i \mathbf{f}_i \,.\, \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} = \sum_i m_i \mathbf{a}_i \,.\, \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \tag{3}$$

Výraz $Q_j = \sum\limits_i m_i \mathbf{a}_i \,.\, \dfrac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j}$, predstavujúci pravú stranu rovnice (3), možno vyjadriť pomocou kinetickej energie K sústavy.

Derivujme rovnicu $\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i(q_1, q_2, \ldots, q_j, \ldots, q_s, t)$ podľa času

$$\dot{\mathbf{r}}_i = \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} \tag{4}$$

a túto parciálne podľa tzv. *zovšeobecnenej rýchlosti* $\dot{q}_j$, dostaneme

$$\frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j}$$

Z tohto výsledku vyplýva

$$\boldsymbol{a}_i \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j} = \frac{\mathrm{d}\dot{\boldsymbol{r}}_i}{\mathrm{d}t} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dot{\boldsymbol{r}}_i \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j}\right) - \dot{\boldsymbol{r}}_i \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dot{\boldsymbol{r}}_i \cdot \frac{\partial \dot{\boldsymbol{r}}_i}{\partial \dot{q}_j}\right) - \dot{\boldsymbol{r}}_i \cdot \frac{\partial \dot{\boldsymbol{r}}_i}{\partial q_j}$$

lebo

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j} = \frac{\partial^2 \boldsymbol{r}_i}{\partial q_1 \partial q_j}\dot{q}_1 + \frac{\partial^2 \boldsymbol{r}_i}{\partial q_2 \partial q_j}\dot{q}_2 + \ldots + \frac{\partial^2 \boldsymbol{r}_i}{\partial t \partial q_j} =$$

$$= \frac{\partial}{\partial q_j}\left(\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_1}\dot{q}_1 + \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_2}\dot{q}_2 + \ldots + \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial t}\right) = \frac{\partial \dot{\boldsymbol{r}}_i}{\partial q_j}$$

takže

$$\boldsymbol{a}_i \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}\frac{\partial v_i^2}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{1}{2}\frac{\partial v_i^2}{\partial q_j}$$

a

$$Q_j = \sum_i m_i \boldsymbol{a}_i \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sum_i m_i \frac{1}{2}\frac{\partial v_i^2}{\partial \dot{q}_j} - \sum_i m_i \frac{1}{2}\frac{\partial v_i^2}{\partial q_j} =$$

$$= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial K}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial K}{\partial q_j} \tag{5}$$

Skúmajme teraz význam výrazu $P_j = \sum_i \boldsymbol{f}_i \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j}$, ktorý predstavuje ľavú stranu rovnice (3).

Práca všetkých hnacích síl pri virtuálnom posunutí bodov sústavy je

$$\sum_i \boldsymbol{f}_i \cdot \delta \boldsymbol{r}_i = \sum_i \boldsymbol{f}_i \cdot \sum_j \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j}\delta q_j$$

Keď sa zmení len j-tá zovšeobecnená súradnica, táto práca je

$$\delta A = \sum_i \boldsymbol{f}_i \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j}\delta q_j = P_j \delta q_j$$

takže

$$P_j = \lim_{\delta q_j \to 0}\frac{\delta A}{\delta q_j}$$

Vzhľadom na podobnosť vzťahu $\delta A = P_j \delta q_j$ a vyjadrenia práce v prípade, že sa pôsobisko sily posúva pozdĺž osi X, $\mathrm{d}A = f_x\,\mathrm{d}x$, veličina

$$P_j = \sum_i \boldsymbol{f}_i \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j} \tag{6}$$

nazýva sa *Lagrangeova sila*. Keď sú hnacie sily konzervatívne, t. j. ak ich práca závisí len od zmeny polohy sústavy, potom $P_j \delta q_j = \delta A = -\delta U$, takže v tom prípade

$$P_j = -\frac{\partial U}{\partial q_j}$$

a rovnica (3) je

$$-\frac{\partial U}{\partial q_j} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial K}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial K}{\partial q_j} \tag{7}$$

Takýchto rovníc v prípade sústavy, ktorá má s stupňov voľnosti svojho pohybu, je s. Sú to tzv. *Lagrangeove rovnice druhého druhu* v tvare platnom pre sústavy s konzervatívnymi silami. Ináč môžeme napísať len

$$P_j = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial K}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial K}{\partial q_j} \tag{8}$$

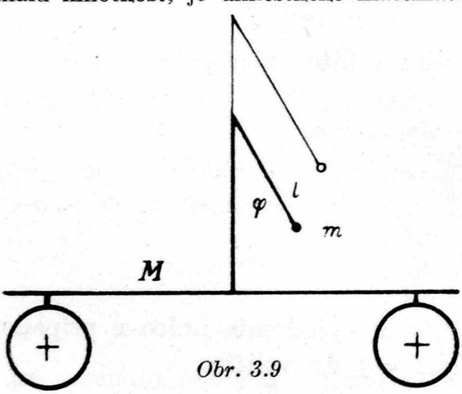
Pretože polohová energia U nie je funkciou aj zovšeobecnených rýchlostí $\dot{q}_j$, rovnicu (7) môžeme napísať aj takto

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial (K - U)}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial (K - U)}{\partial q_j} \tag{9}$$

alebo, ak rozdiel $K - U$ nazývaný *Lagrangeovou funkciou* označíme L, bude platiť

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial L}{\partial q_j} \tag{10}$$

Príklad 1. Na plošine vozíka s hmotnosťou M, ktorého kolesá majú zanedbateľne malú hmotnosť, je umiestnené matematické kyvadlo, hmotný bod s hmotnosťou m, zavesený na nehmotnej niti dĺžky l *(obr. 3.9)*. Na začiatku počítania času, keď celé zariadenie bolo v pokoji a stred vozíka bol v mieste určenom súradnicou x_0, hmotnému bodu bola udelená začiatočná rýchlosť v_0. Pomocou Lagrangeových rovníc druhého druhu odvodíme priebeh pohybu vozíka aj kyvadla.



Obr. 3.9

Kinetická energia celého zariadenia je

$$K = \frac{1}{2} M\dot{x}^2 + \frac{1}{2} m(\dot{x} + \dot{\varphi}\, l)^2$$

keď predpokladáme, že uhol φ je stále dostatočne malý. Polohovú energiu zariadenia určuje vzorec

$$U = mgl(1 - \cos\varphi)$$

takže Lagrangeova funkcia má tvar

$$L = \frac{1}{2} M\dot{x}^2 + \frac{1}{2} m(\dot{x} + l\dot{\varphi})^2 - mgl(1 - \cos\varphi)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = M\dot{x} + m(\dot{x} + l\dot{\varphi}), \qquad \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = ml(\dot{x} + l\dot{\varphi})$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = M\ddot{x} + m(\ddot{x} + l\ddot{\varphi}), \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = ml(\ddot{x} + l\ddot{\varphi})$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 0 \qquad \frac{\partial L}{\partial \varphi} = -mgl\sin\varphi \doteq -mgl\,\varphi$$

Dosadením týchto výsledkov do Lagrangeovej rovnice druhého druhu (10) dostaneme diferenciálne rovnice pre súradnice x a φ

$$M\ddot{x} + m(\ddot{x} + l\ddot{\varphi}) = 0 \tag{a}$$

$$ml(\ddot{x} + l\ddot{\varphi}) = -mgl\varphi \tag{b}$$

Z rovnice (a) vyplýva

$$\ddot{x} = -\frac{ml}{M + m}\ddot{\varphi}$$

z čoho po dosadení do rovnice (b) dostaneme

$$\frac{M}{M + m} l\ddot{\varphi} = -g\varphi$$

$$\ddot{\varphi} = -\frac{g}{l}\frac{M + m}{m}\varphi \tag{c}$$

Rovnica (c) je diferenciálna rovnica harmonického pohybu, takže kruhová frekvencia $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}\frac{M + m}{M}}$ a perióda kývania kyvadla $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}\frac{M}{M + m}}$. Je teda väčšia na vozíku, ktorý sa môže pohybovať, ako na zabrzdenom vozíku, keď (ako vieme zo štúdia fyziky na strednej škole, pozri aj čl. 4.10) $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$. Priebeh pohybu kyvadla určuje zrejme funkcia

$$\varphi = \varphi_0 \sin\omega t \tag{d}$$

Vyplýva z nej, že $\ddot{\varphi} = -\varphi_0\omega^2 \sin\omega t$, čo dosadené do rovnice (a) dáva

$$(M + m)\,\ddot{x} = ml\varphi_0\,\omega^2 \sin\omega t$$

$$\frac{\mathrm{d}\dot{x}}{\mathrm{d}t} = \frac{ml\varphi_0\omega^2}{M + m}\sin\omega t$$

a integráciou v hraniciach od 0 do t

$$\dot{x} = -\frac{ml\varphi_0\omega}{M + m}(\cos\omega t - 1)$$

Ďalšia integrácia poskytuje

$$x = x_0 + \frac{ml\varphi_0\omega}{M + m}t - \frac{ml\varphi_0}{M + m}\sin\omega t$$

Krajnú uhlovú odchýlku kyvadla φ_0 vypočítame z rovnice $\dot{\varphi} = \omega\varphi_0 \cos \omega t$, ktorá vyplýva z rovnice (d), jej derivovaním podľa času, keď do nej za $\dot{\varphi}$ dosadíme v_0/l a súčasne za t nulu, t. j.

$$\frac{v_0}{l} = \omega\varphi_0, \quad \varphi_0 = \frac{v_0}{l\omega}$$

teda

$$\varphi = \frac{v_0}{\omega l} \sin \omega t$$

$$x = x_0 + \frac{m}{M+m} v_0 t - \frac{m}{M+m} \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t$$

3.9. Hamiltonove rovnice. Kinetickú energiu hmotného bodu určuje vzorec $K = \frac{1}{2} mv^2 = \frac{1}{2} m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$, takže na pr. $\frac{\partial K}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}$. Vzhľadom na tento vzťah, keďže súčin $m\dot{x}$ predstavuje veľkosť zložky p_x vektora hybnosti hmotného bodu $\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v} = m(\dot{x}\boldsymbol{i} + \dot{y}\boldsymbol{j} + \dot{z}\boldsymbol{k})$, parciálna derivácia kinetickej energie sústavy hmotných bodov, vyjadrenej pomocou zovšeobecnených súradníc, rýchlostí a príp. aj času, podľa niektorej zovšeobecnenej rýchlosti sa v mechanike sústav nazýva *zovšeobecnená hybnosť* (nevhodne aj *impulz*) a označuje sa p_j,

$$p_j = \frac{\partial K}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \tag{1}$$

kde $L = K - U$ je Lagrangeova funkcia.

Hamilton (sir William Rowan Hamilton, 1805—1865, írsky matematik a astronóm) zavedením zovšeobecnených hybností a svojej funkcie

$$H = \sum p_j \dot{q}_j - L \tag{2}$$

odvodil z Lagrangeových rovníc druhého druhu svoje rovnice, ktoré sa pre svoju jednoduchosť výborne osvedčili nielen v mechanike, ale aj v štatistickej a kvantovej fyzike.

Z s rovníc (1), definujúcich zovšeobecnené hybnosti, možno vypočítať zovšeobecnené rýchlosti $\dot{q}_j$ ako funkcie zovšeobecnených súradníc q_j, hybností p_j a času. Keď zovšeobecnené rýchlosti vystupujúce v rozdiele $H = \sum p_j \dot{q}_j - L$ vyjadríme všetky pomocou týchto premenných aj *Hamiltonova funkcia* sa stane funkciou len týchto premenných.

Utvorme parciálnu deriváciu Hamiltonovej funkcie (2) ako funkcie zovšeobecnených súradníc, hybností a času podľa zovšeobecnenej súradnice q_r. Dostaneme

$$\frac{\partial H}{\partial q_r} = \sum_j p_j \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial q_r} - \frac{\partial L}{\partial q_r} - \sum_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial q_r} =$$

$$= \sum_j \left(p_j - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right) \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial q_r} - \frac{\partial L}{\partial q_r} = -\frac{\partial L}{\partial q_r}$$