Krajnú uhlovú odchýlku kyvadla φ_0 vypočítame z rovnice $\dot{\varphi} = \omega\varphi_0 \cos \omega t$, ktorá vyplýva z rovnice (d), jej derivovaním podľa času, keď do nej za $\dot{\varphi}$ dosadíme v_0/l a súčasne za t nulu, t. j.

$$\frac{v_0}{l} = \omega\varphi_0, \quad \varphi_0 = \frac{v_0}{l\omega}$$

teda

$$\varphi = \frac{v_0}{\omega l} \sin \omega t$$

$$x = x_0 + \frac{m}{M+m} v_0 t - \frac{m}{M+m} \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t$$

3.9. Hamiltonove rovnice. Kinetickú energiu hmotného bodu určuje vzorec $K = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$, takže na pr. $\frac{\partial K}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}$. Vzhľadom na tento vzťah, keďže súčin $m\dot{x}$ predstavuje veľkosť zložky p_x vektora hybnosti hmotného bodu $\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v} = m(\dot{x}\boldsymbol{i} + \dot{y}\boldsymbol{j} + \dot{z}\boldsymbol{k})$, parciálna derivácia kinetickej energie sústavy hmotných bodov, vyjadrenej pomocou zovšeobecnených súradníc, rýchlostí a príp. aj času, podľa niektorej zovšeobecnenej rýchlosti sa v mechanike sústav nazýva *zovšeobecnená hybnosť* (nevhodne aj *impulz*) a označuje sa p_j,

$$p_j = \frac{\partial K}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \tag{1}$$

kde $L = K - U$ je Lagrangeova funkcia.

Hamilton (sir William Rowan Hamilton, 1805—1865, írsky matematik a astronóm) zavedením zovšeobecnených hybností a svojej funkcie

$$H = \sum p_j \dot{q}_j - L \tag{2}$$

odvodil z Lagrangeových rovníc druhého druhu svoje rovnice, ktoré sa pre svoju jednoduchosť výborne osvedčili nielen v mechanike, ale aj v štatistickej a kvantovej fyzike.

Z s rovníc (1), definujúcich zovšeobecnené hybnosti, možno vypočítať zovšeobecnené rýchlosti $\dot{q}_j$ ako funkcie zovšeobecnených súradníc q_j, hybností p_j a času. Keď zovšeobecnené rýchlosti vystupujúce v rozdiele $H = \sum p_j \dot{q}_j - L$ vyjadríme všetky pomocou týchto premenných aj *Hamiltonova funkcia* sa stane funkciou len týchto premenných.

Utvorme parciálnu deriváciu Hamiltonovej funkcie (2) ako funkcie zovšeobecnených súradníc, hybností a času podľa zovšeobecnenej súradnice q_r. Dostaneme

$$\frac{\partial H}{\partial q_r} = \sum_j p_j \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial q_r} - \frac{\partial L}{\partial q_r} - \sum_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial q_r} =$$

$$= \sum_j \left(p_j - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right) \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial q_r} - \frac{\partial L}{\partial q_r} = - \frac{\partial L}{\partial q_r}$$

Pri tomto výpočte sme Langrangeovu funkciu považovali za funkciu všetkých premenných q_j, $\dot{q}_j$, t, zovšeobecnené rýchlosti za funkcie premenných q_j, p_j, t a použili sme poučku o počítaní parciálnych derivácií zložených funkcií. Podľa Lagrangeovej rovnice druhého druhu je však

$$-\frac{\partial L}{\partial q_r} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r} = -\dot{p}_r$$

takže

$$\dot{p}_r = -\frac{\partial H}{\partial q_r} \tag{3}$$

Derivovaním Hamiltonovej funkcie podľa zovšeobecnenej hybnosti dostaneme

$$\frac{\partial H}{\partial p_r} = \dot{q}_r + \sum_j p_j \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial p_r} - \sum_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\frac{\partial \dot{q}_j}{\partial p_r} = \dot{q}_r \tag{4}$$

Rovnice (3) a (4), ktoré napíšeme spolu ešte raz, budú mať tvar

$$\dot{p}_r = -\frac{\partial H}{\partial q_r}, \quad \dot{q}_r = \frac{\partial H}{\partial p_r} \tag{3, 4}$$

sú hľadané Hamiltonove rovnice. Odvodili sme ich z Lagrangeových rovníc druhého druhu v znení platnom pre sústavy s konzervatívnymi silami, takže v získanej podobe platia len pre takéto sústavy.

Keď väzby pôsobiace v sústave sú nezávislé od času, podľa vzorca (3.8.4) kinetická energia sústavy je homogénnou kvadratickou funkciou zovšeobecnených rýchlostí. Keď napr. pri dvoch hmotných bodoch jej vyjadrenie má tvar $K = a_{11}\dot{q}_1^2 + a_{12}\dot{q}_1\dot{q}_2 + a_{22}\dot{q}_2^2$, zovšeobecnené hybnosti sú $p_1 = 2a_{11}\dot{q}_1 + a_{12}\dot{q}_2$, $p_2 = a_{12}\dot{q}_1 + 2a_{22}\dot{q}_2$ a $\sum p_j\dot{q}_j = 2a_{11}\dot{q}_1^2 + a_{12}\dot{q}_2\dot{q}_1 + a_{12}\dot{q}_1\dot{q}_2 + 2a_{22}\dot{q}_2^2 = 2K$, čo zrejme platí aj pre sústavu skladajúcu sa z ľubovoľného počtu bodov. V tom prípade Hamiltonova funkcia $H = \sum p_j\dot{q}_j - L = 2K - K + U = K + U = E$, kde E je celková energia sústavy.

Príklad 1. Pomocou Hamiltonových rovníc budeme počítať ten istý príklad, ktorý sme v predchádzajúcom článku počítali pomocou Lagrangeových rovníc druhého druhu.

Energia zariadenia je

$$E = \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m(\dot{x} + l\dot{\varphi})^2 + mgl(1 - \cos\varphi)$$

Zovšeobecnené hybnosti prislúchajúce súradniciam x a φ sú dané vzorcami

$$p_x = \frac{\partial K}{\partial \dot{x}} = M\dot{x} + m(\dot{x} + l\dot{\varphi}) = (M + m)\dot{x} + ml\dot{\varphi} \tag{a}$$

$$p_\varphi = \frac{\partial K}{\partial \dot{\varphi}} = ml(\dot{x} + l\dot{\varphi}) = ml\dot{x} + ml^2\dot{\varphi} \tag{b}$$

Vyplýva z nich

$$\dot{x} = \frac{lp_x - p_\varphi}{Ml}, \qquad \dot{\varphi} = \frac{M + m}{Mml^2} p_\varphi - \frac{1}{Ml} p_x$$

Energia zariadenia preto je

$$E = \frac{1}{2} \frac{(p_x l - p_\varphi)^2}{Ml^2} + \frac{1}{2} \frac{p_\varphi^2}{ml^2} + mgl(1 - \cos\varphi)$$

Preto

$$\dot{p}_x = -\frac{\partial E}{\partial x} = 0, \qquad \dot{p}_\varphi = -\frac{\partial E}{\partial \varphi} = -mgl \sin\varphi \doteq -mgl\varphi$$

Spojením týchto rovníc s rovnicami (a) a (b) dostaneme rovnice

$$(M + m)\,\ddot{x} + ml\ddot{\varphi} = 0$$

$$ml\ddot{x} + ml^2\ddot{\varphi} = -mgl\varphi$$

totožné s rovnicami (a) a (b) z príkladu v predchádzajúcom článku.

Všimnime si, že sme pri riešení úlohy nepoužili druhé Hamiltonove rovnice. Je to dôsledok toho, že tieto rovnice nevyjadrujú nijakú fyzikálnu zákonitosť, lebo ani pri ich odvodzovaní sme nijakú fyzikálnu zákonitosť nepoužili. Vyplývajú z definície Hamiltonovej funkcie a zovšeobecnených hybností. Používajú sa vtedy, keď je energia sústavy priamo daná ako funkcia zovšeobecnených súradníc, hybností a času. V tom prípade predstavujú rovnice pre výpočet hybností, potrebných na dosadenie do prvých rovníc.

3.10. Hamiltonov princíp. Pri pohybe sústavy hmotných bodov za účinku daných hnacích a väzbových síl polohové vektory jednotlivých hmotných bodov sú určité funkcie času. Pre každý čas t zvoľme si ich virtuálne zmeny $\delta\mathbf{r}_i$. Potom aj tieto budú funkciami času, a preto funkciami času budú aj mysleným spôsobom zmenené (variované) polohové vektory $\mathbf{r}' = \mathbf{r}_i + \delta\mathbf{r}_i$.

Nech sú hnacie sily v sústave hmotných bodov konzervatívne. V tom prípade princíp virtuálnych posunutí vyjadruje rovnica

$$\sum (\mathrm{grad}_i U + m_i \mathbf{a}_i) \,.\, \delta\mathbf{r}_i = 0$$

Vyplýva z nej

$$\sum m_i \mathbf{a}_i \,.\, \delta\mathbf{r}_i = -\sum \mathrm{grad}_i U \,.\, \delta\mathbf{r}_i = -\delta U \tag{a}$$

Člen $m_i \mathbf{a}_i \,.\, \delta\mathbf{r}_i$ môžeme upraviť takto

$$m\mathbf{a} \,.\, \delta\mathbf{r} = m \frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t} \,.\, (\mathbf{r}' - \mathbf{r}) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m\mathbf{v} \,.\, \delta\mathbf{r}) - m\mathbf{v}\left(\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}'}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t}\right) =$$

$$= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m\mathbf{v} \,.\, \delta\mathbf{r}) - m\mathbf{v} \,.\, \delta\mathbf{v} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m\mathbf{v} \,.\, \delta\mathbf{r}) - \delta \frac{1}{2} mv^2$$