

Ih súčet je teda

$$J_1^* + J_2^* = 2J_1^* = 2J_2^* = \int (x^2 + y^2) dm = J_3^*$$

čiže

$$J_1^* = J_2^* = \frac{1}{2} J_3^* = \frac{1}{2} \int (x^2 + y^2) dm = \frac{1}{2} \int a^2 dm$$

V našom prípade plošná hustota hmotnosti je $\frac{M}{\pi r^2}$, takže môžeme písať:

$$dm = \frac{M}{\pi r^2} 2\pi a da \text{ a teda}$$

$$J_1^* = J_2^* = \frac{1}{2} J_3^* = \frac{M}{2\pi r^2} \int a^2 \cdot 2\pi a \cdot da = \frac{1}{4} Mr^2$$

Podľa obr. 4.17 je $\alpha = \frac{1}{2} \pi$, $\beta = \varphi + \frac{1}{2} \pi$, $\gamma = \varphi$, teda

$$\cos \alpha = 0, \quad \cos \beta = -\sin \varphi, \quad \cos \gamma = \cos \varphi$$

Podľa odvodeného vzorca pre deviačný moment v našom prípade vychádza

$$\begin{aligned} \mathbf{U} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i}, & \mathbf{j}, & \mathbf{k} \\ 0, & -J_2^* \sin \varphi, & J_3^* \cos \varphi \\ 0, & -\sin \varphi, & \cos \varphi \end{vmatrix} = \mathbf{i}(J_3^* \cos \varphi \sin \varphi - J_2^* \sin \varphi \cos \varphi) = \\ &= \mathbf{i}J_1^* \sin \varphi \cos \varphi = \mathbf{i} \frac{Mr^2}{4} \sin \varphi \cos \varphi = \frac{Mr^2 \sin 2\varphi}{8} \mathbf{i} \end{aligned}$$

Absolútna hodnota momentu odstredivých síl je teda

$$D = \omega^2 U = \frac{M\omega^2 r^2 \sin 2\varphi}{8}$$

Axiálne tlaky P vyplývajú z rovnice $D = Pl$,

$$P = \frac{M\omega^2 r^2 \sin 2\varphi}{8l}$$

4.10. Kyvadlo. Teleso upevnené tak, že sa môže otáčať okolo vodorovnej osi, ktorá neprechádza jeho ťažiskom, volá sa fyzikálne kyvadlo. Keď vzdialenosť jeho ťažiska od osi je a a teleso má hmotnosť M , pri výchylke z rovnovážnej polohy účinkuje na teleso jeho tiaž Mg , ktorá vzhľadom na os kyvadla má moment veľkosti $-Mga \sin \varphi$. Podľa rovnice (4.7.10) na str. 162 pre pohyb fyzikálneho kyvadla (obr. 4.18) platí teda diferenciálna rovnica

$$J \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = -Mga \sin \varphi$$

alebo

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\frac{Mga}{J} \sin \varphi$$

Pri malých výchylkách môžeme písať: $\sin \varphi \doteq \varphi$. Týmto zjednodušením pohybová rovnica fyzikálneho kyvadla dostáva tvar diferenciálnej rovnice harmonického pohybu,

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\frac{Mga}{J} \varphi$$

Jej všeobecným riešením je funkcia

$$\varphi = \varphi_0 \sin(\omega t + \alpha)$$

kde φ_0 je amplitúda premenlivej uhlovej výchylky, α fázová konštanta, ω kruhová frekvencia, $\omega = \sqrt{\frac{Mga}{J}}$. Perióda kývania kyvadla je teda

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{J}{Mga}} \quad (1)$$

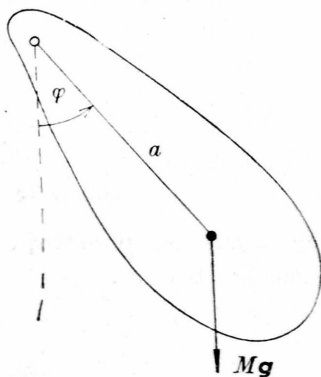
a doba kyvu je $T/2$.

Ako fikciu zavádzame vo fyzike aj pojem *matematického kyvadla*, hmotného bodu na nehmotnom závесе. Keď hmotnosť hmotného bodu je m a dĺžka závesu l , vtedy $J = ml^2$ a vzdialenosť ťažiska od osi (upevnenia závesu) je tiež l . Perióda kývania matematického kyvadla je preto

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{ml^2}{mgl}} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \quad (2)$$

Z porovnania obidvoch posledných vzorcov vyplýva, že pri rovnakej dobe kyvu fyzikálneho a matematického kyvadla má matematické kyvadlo dĺžku $l = \frac{J}{Ma}$, ktorá sa volá *redukovaná dĺžka* daného fyzikálneho kyvadla.

Podobný pohyb ako fyzikálne kyvadlo koná aj zotrvačník tzv. torzného kyvadla. Je to teleso zavesené na zvislom pružnom vlákne tak, že jeho os súmernosti splyva s vláknom (obr. 4.19). Ak zotrvačník torzného kyvadla vytočíme z jeho rovnovážnej polohy o uhol φ , skrútené vlákno účinkuje na zotrvačník dvojicou síl, ktorej moment podľa Hookovho zákona (čl. 5.1) je uhlu φ úmerný a ktorá sa snaží vrátiť vytočený zotrvačník späť do jeho rovnovážnej



Obr. 4.18

polohy, t. j. vyvolať pohyb v zmysle proti vytočeniu. Veľkosť momentu tejto dvojice je teda $D = -D_0\varphi$. Konštanta úmernosti D_0 volá sa *direkčný moment*. Pohyb zotrvačníka torzného kyvadla splňuje preto rovnicu

$$J\varepsilon = -D_0\varphi$$

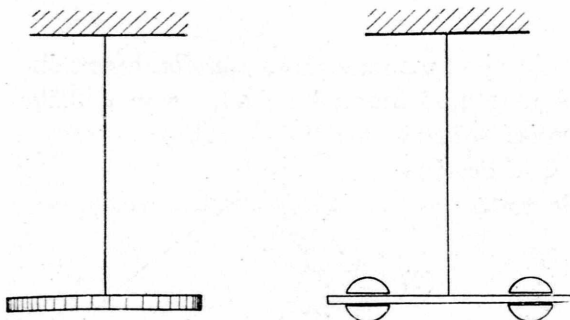
čiže rovnicu

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\frac{D_0}{J}\varphi \quad (3)$$

Táto rovnica je nám však už dobre známou diferenciálnou rovnicou harmonického pohybu, takže výraz pre kruhovú frekvenciu torzných kmitov nášho kyvadla môžeme priamo napísať: $\omega = \sqrt{\frac{D_0}{J}}$. Perióda kmitov je:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{J}{D_0}} \quad (4)$$

Tuhé teleso môže byť staticky aj dynamicky vyvážené uložené aj na pevnej osi a vracané do svojej rovnovážnej polohy pomocou vhodnej pružnej špirály



Obr. 4.19

(nepokoj prenosných hodín, kotvy väčšiny ručičkových elektrických meracích prístrojov a pod.). Pre takto upevnené telesá platia zrejme tiež rovnice (3) a (4). Od meracích prístrojov však zväčša žiadame, aby ich chod bol aperiodický, čo sa dosahuje vhodným tlmením. Používa sa tlmenie vzdušné, pri elektrických prístrojoch často sa používajú tlmiace účinky prúdov indukovaných pohybom brzdeného telesa.

Úlohy na evičenie

1. Vypočítajte moment zotrvačnosti hmotnej úsečky s hmotnosťou m a s dĺžkou l vzhľadom na os, ktorá prechádza jej ťažiskom a na dĺžku úsečky je kolmá! ($ml^2/12$)
2. Vypočítajte moment zotrvačnosti rovnostranného hmotného trojuholníka s hmotnosťou M : a) vzhľadom na jeho výšku, b) vzhľadom na os prechádzajúcu jeho ťažiskom a na plochu trojuholníka kolmú, keď jeho strana má dĺžku a ! ($Ma^2/24$, $Ma^2/12$)
3. Vypočítajte moment zotrvačnosti kruhovej dosky s hmotnosťou M a s polomerom r : a) vzhľadom na jej priemer, b) vzhľadom na os prechádzajúcu jej stredom a na plochu dosky kolmú! ($Mr^2/4$, $Mr^2/2$)

4. Vypočítajte moment zotrvačnosti pravouhlého hranola s hmotnosťou M , ktorého hrany sú a , b , c , vzhľadom na osi prechádzajúce stredmi protilahlých strán, keď $a = 3$ cm, $b = 4$ cm, $c = 12$ cm, $M = 240$ g! (500, 3 200, 3 060 gcm²)

5. Vypočítajte moment zotrvačnosti kocky s hranou a a s hmotnosťou M vzhľadom na jej telesnú uhlopriečku! ($Ma^2/6$)

6. Akou uhlovou rýchlosťou sa otáča guľa okolo svojho priemeru, ak jej polomer $r = 10$ cm, hmotnosť $M = 5$ kg a jej pohybová energia $K = 100$ kpm! ($\omega = 313$ s⁻¹)

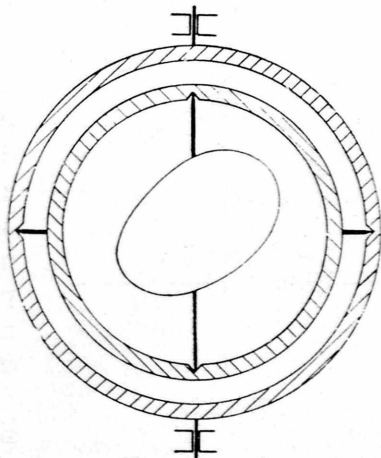
7. Za aký čas prebehne valec s polomerom r a s hmotnosťou M dĺžku naklonenej roviny so sklonom α , keď sa po naklonenej rovine valí? ($t = \frac{3s}{g \sin \alpha}$)

8. V akej vzdialenosti od stredu tyče so stálym a veľmi malým priemerom a s dĺžkou l má byť umiestnená os, aby tyč ako fyzikálne kyvadlo mala najmenšiu dobu kyvu? ($l/2\sqrt{3}$)

9. Vypočítajte gyračný polomer tyče s dĺžkou l , s veľmi malým prierezom vzhľadom na os prechádzajúcu jej ťažiskom! ($l/2\sqrt{3}$)

10. Drôt je stočený do kruhu s polomerom $r = 20$ cm. Vypočítajte dobu kyvu a redukovanú dĺžku tohto telesa ako fyzikálneho kyvadla, keď je uložené na osi kolmej na rovinu kruhu a prechádzajúcej bodom jej obvodu! (0,63 s, 40 cm)

4.11. Pohyb telesa upevneného v jednom bode. Tuhé teleso možno upevniť tak, aby sa len jeden bod telesa nemohol pohybovať, napríklad pomocou guľového kĺbu alebo uložením telesa na osi v *Cardanovom závесе*. Cardanov záves (obr. 4.20) sa skladá z dvoch sústredných kruhových prstencov. Prstenec s väčším polomerom sa môže otáčať okolo osi, ktorá má v priestore stálu polohu, vnútorný prstenec okolo osi, ktorá je nesená vonkajším prstencom a je na os vonkajšieho prstenca kolmá. Priemer tohto prstenca, na os vnútorného prstenca kolmý, môže teda zaujať v priestore akúkoľvek polohu. Ak tento prímer stotožníme s mechanickou osou nejakého tuhého telesa, len ten bod tuhého telesa nebude môcť zmeniť svoju polohu v priestore, ktorý bude v spoločnom strede obidvoch prstencov Cardanovho závesu. Teleso bude mať však pritom tri stupne voľnosti svojho pohybu, umožňujúce, aby tri Eulerove uhly (čl. 1.8),



Obr. 4.20