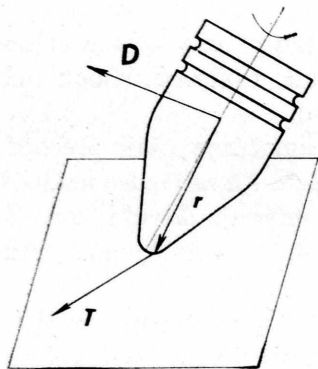
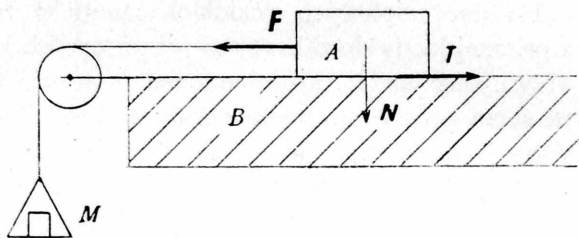


vine poludníka, os zotrvačnickového kompasu sa samovoľne stáča do tejto roviny.

Na zakončenie tohto článku vysvetlíme ešte tento všeobecne známy jav: Os zotrvačníka, ktorý bol roztočený a dolným koncom svojej osi šikmo postavený na vodorovnú podložku, v priebehu precesie sa postupne vzpriamuje, najmä ak dolný koniec osi je tupý. Príčinou je trenie medzi podložkou a osou zotrvačníka. Ak sa zotrvačník otáča okolo svojej osi pri pozo-



Obr. 4.28



Obr. 4.29

rovaní zhora v zmysle proti pohybu hodinových ručičiek, pri polohe zotrvačníka podľa obr. 4.28 na zotrvačník účinkujúce trenie smeruje kolmo pred papier. Os zotrvačníka sa srazí s plytúcim jeho momentom, ktorý — ako je to naznačené na obrázku — treba však vzťahovať na ťažisko zotrvačníka, lebo zotrvačník tupým koncom svojej osi opretý o hladkú podložku nemá nepohyblivý bod.

4.12. Trenie. Teleso A nech je položené na hladkú vodorovnú podložku B (obr. 4.29). Teleso A môžeme sa snažiť uviesť do pohybu vzhľadom na teleso B prikladaním závaží na misku M , čím na teleso A začína pôsobiť vo vodorovnom smere sila F . Pozorujeme, že pokiaľ sila F je dosť malá, čakávaný pohyb nenastane. Pri pozvoľnom a opatrnom zväčšovaní sily F teleso A začne klzať po povrchu telesa B , až keď sila F dosiahne určitú hodnotu F_0 . Z naznačeného pokusu vyplýva, že súčasne so silou F , ktorá sa snaží vyvolať pohyb telesa A vzhľadom na jeho podložku, v stykovej ploche oboch telies začína na teleso A účinkovať aj iná sila T , ktorá má opačný smer a ktorá — pokiaľ je $F < F_0$ — účinnosť sily F ruší, takže zo začiatku je $T = -F$. Sila T sa volá *trenie v šmyku* (tiež *klzné* alebo *vlečné*).

Opísaný pokus môžeme zopakovať s tou zmenou, že teleso A po každom malom zväčšení sily F pootočíme v smere sily F . Zistíme, že na to, aby sa povrch telesa A po povrchu telesa B udržal, stačí už sila F' , ktorej absolútna hodnota $F' < F_0$. Na styku dvoch telies, ktoré po sebe rovnomerne klžu, pôsobí teda tiež trenie, ktorého absolútna hodnota je však za inakšie rovnakých pod-

mienok menšia než najväčšia hodnota trenia telies stýkajúcich sa za relatívneho pokoja. Treba preto rozlišovať trenie v pokoji (*statické*) a za pohybu (*kinetické*). Trenie statické pôsobí proti vzniku relatívneho pohybu, trenie kinetické, ktoré je so smerom relatívnej rýchlosti vždy nesúhlasne rovnobežné, snaží sa túto rýchlosť zmenšiť.

Z výsledkov pokusov Coulombových (1781) a Morinových (1833), ktoré ľahko môžeme potvrdiť, vyplýva, že maximálna hodnota statického trenia v šmyku T_0 aj kinetické trenie v šmyku T' sú úmerné sile N , ktorou sú stýkajúce sa telesá k sebe pritláčané. Trenie v šmyku nezávisí však od veľkosti stýkajúcich sa plôch, a kinetické trenie v šmyku pri malých rýchlostiach (0,5—5 m/s) približne ani od tejto rýchlosti. Konštanty úmernosti vo vzťahoch:

$$T_0 = \mu_0 N \quad (1)$$

$$T' = \mu' N \quad (2)$$

sú tzv. *koefficienty trenia* a závisia od akosti stýkajúcich sa látok a od hladkosti dotýkových plôch.

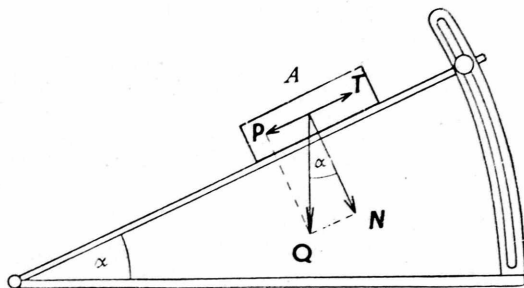
Okolnosť, že je $\mu' < \mu_0$, má význam pri brzdení vlakov. Pokiaľ sa kolesá točia, sila, ktorou účinkujú koľajnice na brzdený vlak, môže byť až $T_0 = \mu_0 N$, kde N je časť tiaže vlaku pripadajúca na brzdené kolesá. Keď sa však brzdy príliš pritiahnu, začnú sa kolesá po koľajniciach šmýkať a trenie je potom len $T' = \mu' N < T_0$, takže brzdenie je menej účinné, k čomu ešte prispieva aj to, že pri väčších rýchlostiach koeficient kinetického trenia v šmyku sa začína znižovať. Z tej istej príčiny lokomotíva účinnejšie ťahá, pokiaľ sa jej kolesá po koľajniciach ešte valia.

Položme teleso A na naklonenú rovinu s meniteľným sklonom (obr. 4.30). Teleso A za účinku zložky svojej tiaže Q rovnobežnej s naklonenou rovinou začne sa pohybovať (pohyb telesa sa udrží), keď táto zložka $F = Q \sin \alpha$ sa stane rovnou maximálnemu treniu statickému (treniu kinetickému), čiže až je $Q \sin \alpha = T = \mu N = \mu Q \cos \alpha$, alebo

$$\operatorname{tg} \alpha = \mu$$

na čo je potrebné, aby sklon naklonenej roviny, daný uhlom α , bol dostatočne veľký. Koeficienty statického a kinetického trenia v šmyku teda sú:

$$\mu_0 = \operatorname{tg} \alpha_0 \quad (3)$$



Obr. 4.30

a

$$\mu' = \operatorname{tg} \alpha' \quad (4)$$

kde α_0 (uhol statického trenia) je uhol sklonu naklonenej roviny, pri ktorom pohyb telesa A spočívajúceho na naklonenej rovine práve samovoľne nastane, a α' (uhol kinetického trenia) je uhol, pri ktorom sa pohyb telesa A po naklonenej rovine už udrží.

Koeficienty trenia možno merať pomocou zariadenia znázorneného na obr. 4.29 (vodorovný drsnomer) aj pomocou prístroja, ktorý predstavuje obr. 4.30 (sklonný drsnomer). V prvom prípade treba určiť tiaž Q pohyblivej vzorky a silu $F_0(F'_0)$, potrebnú na prekonanie trenia. Koeficienty trenia sú potom $\mu_0 = \frac{F_0}{Q}$ alebo $\mu' = \frac{F'}{Q}$.

Pri používaní sklonného drsnomeru stačí odčítať priamo na stupnici prístroja príslušný uhol trenia.

Niektoré koeficienty a uhly trenia sú uvedené v tabuľke 4.1.

Tabuľka 4.1

Niektoré koeficienty a uhly trenia statického a kinetického

	μ_0	α_0	μ'	α'
Oceľ na lade	0,027	1°36'	0,014	48'
Oceľ na oceli	0,11—0,30	6°20'—16°40'	0,07—0,25	4° —14°
Kov na dreve	0,20—0,55	11°20'—29°	0,20—0,50	11°20'—26°30'
Kov na koži	0,25—0,60	14° —31°	0,12—0,36	6°50'—20°
Drevo na dreve	0,43—0,62	23° —32°	0,19—0,48	12° —25°

Úloha 1. Lokomotíva má tiaž $Q_0 = 50$ ton a tiaž vlaku aj s lokomotívou je $Q = 750$ ton. Vypočítame najväčšie možné zrýchlenie vlaku pri jeho odchode zo stanice, ak trat je vodorovná a statický koeficient trenia na styku kolies a koľajníc je $\mu_0 = 0,15$.

Vlak môžu uvádzať do zrýchleného pohybu len vonkajšie sily. Tieto sú tiaž vlaku a trenie na styku kolies a koľajníc. Na vodorovnej trati ako hnacia sila prichádza do úvahy len trenie na styku kolies poháňaných mechanizmom lokomotívy a koľajníc, ktoré zabraňuje, aby sa hnané kolesá lokomotívy po koľajniciach šmykali (obr. 4.31). Budeme predpokladať, že z piatich párov kolies lokomotívy len dva páry sú hnané a že tiaž lokomotívy je na všetky jej kolesá rovnomerne rozložená. Maximálna hodnota užitočného trenia je potom $\overline{T_0} = \mu_0 \frac{2Q_0}{5}$, takže najväčšie zrýchlenie, ktorým vlak môže odchádzať zo stanice, je:

$$a = \frac{T_0}{Q} g = \frac{2\mu_0}{5} \frac{Q_0}{Q} g = 0,06 \frac{1}{15} 9,8 \frac{m}{s^2} = 0,039 \text{ ms}^{-2}$$

Keby boli poháňané všetky kolesá lokomotívy, toto zrýchlenie by bolo

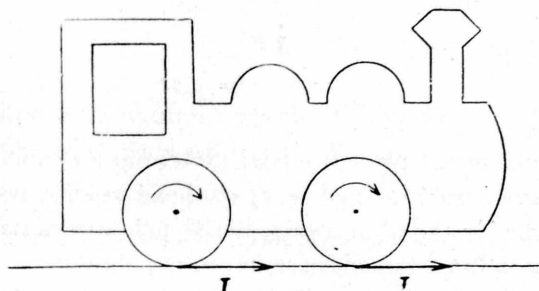
$$a = \mu_0 \frac{Q_0}{Q} g = 0,15 \cdot \frac{1}{15} g = 0,01g \doteq 0,1 \text{ ms}^{-2}$$

a keby boli poháňané všetky kolesá lokomotívy aj vozňov, bolo by

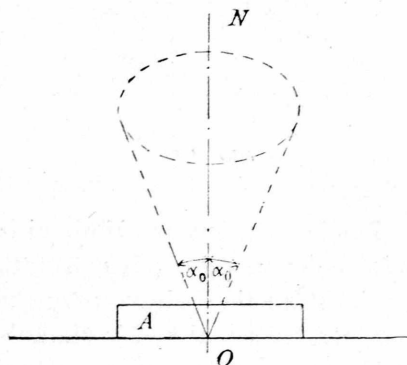
$$a = \mu_0 g = 0,15 \cdot g \doteq 1,5 \text{ ms}^{-2}$$

Keď sa teda žiada, aby podzemné elektrické vlaky veľkých miest mohli čo najrýchlejšie odchádzať zo staníc, majú byť podľa možnosti poháňané všetky kolesá celej vlakovej súpravy.

Je pozoruhodné, že ak hnací stroj je schopný vyvíjať dosť veľkú silu, najväčšie zrýchlenie, ktoré sa môže dosiahnuť, nie je určené touto silou, ale zaťažením hnacích kolies, ktoré má byť čo najväčšie.



Obr. 4.31



Obr. 4.32

Okrem toho, že $\mu_0 = \operatorname{tg} \alpha_0$, uhol statického trenia α_0 má ešte jeden dôležitý význam. Okolo normály ON v mieste dotyku dvoch telies (obr. 4.32) ako osi zostrojíme tzv. *kužele trenia*, ktorého povrchové priamky zvierajú s normálou ON uhol α_0 . Ak teleso A je pritláčané k podložke silou F , ktorej priamka zvierá s normálou ON uhol β , normálový tlak je $F \cos \beta$ a tangenciálna zložka tejto sily je $F \sin \beta$. Na to, aby teleso A začalo kĺzať po svojej podložke, je potrebné, aby bol splnený vzťah

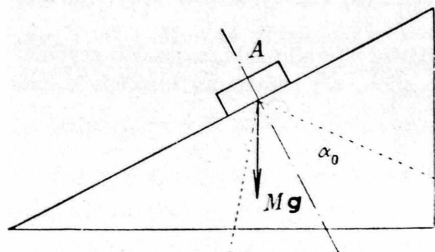
$$F \sin \beta > T_0 = \mu_0 N = \mu_0 F \cos \beta = F \operatorname{tg} \alpha_0 \cos \beta,$$

čiže musí byť $\operatorname{tg} \beta > \operatorname{tg} \alpha_0$, t. j. $\beta > \alpha_0$. Pokiaľ priamka sily F je vo vnútri kužele trenia, teleso A nezačne kĺzať po svojej podložke, ani keď sila F je akokoľvek veľká.

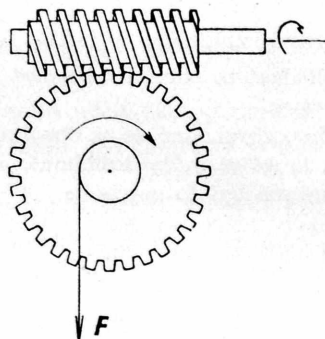
Pomocou kužele trenia možno názorne vyšetrovať podmienky rovnováhy pevných telies za účinku trenia. Napríklad hranol A na obr. 4.33 je na naklonenej

rovine v rovnováhe, lebo jeho ťažiskom vedená zvislá priamka je vo vnútri kužela trenia.

Trenie v šmyku umožňuje bezpečne spájať súčiastky skrutkami. Skrutka nepovolí, pokiaľ je stúpanie závitov menšie ako uhol trenia na styku vretena a maticy. Malé stúpanie umožňuje súčasne pôsobiť potrebné veľkým tlakom na spájané súčiastky.



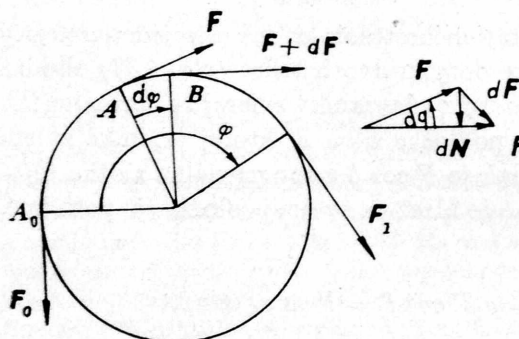
Obr. 4.33



Obr. 4.34

Trenie v šmyku umožňuje aj jednosmerný prevod medzi vretenom a ozubeným kolesom (obr. 4.34). Ak otáčame vreteno, točí sa aj ozubené koleso; no pokiaľ stúpanie závitov vretena je menšie ako uhol trenia, sila F , účinkujúca na ozubené koleso, aj keď je akokoľvek veľká, ozubeným kolesom nepohne.

Na trení spočíva aj prenášanie sily z kolesa na koleso pomocou remeňa napnutého na ich obvode. Vyšetříme, akú najväčšiu silu možno remeňom



Obr. 4.35

prenášať. Aby remeň napínaný na jednom konci silou F_0 (obr. 4.35) začal po remenici kĺzať, musíme na druhom konci ťahať silou $F_1 = F_0 + T_0$, kde T_0 je statické trenie na styku remeňa a remenice. Najväčšia sila, ktorú možno remeňom prenášať, rovná sa teda treniu $T_0 = F_1 - F_0$.

Odvodíme vzťah medzi silami F_0 a F_1 . Nech sú A a B koncové body elementárneho úseku remeňa na remenici, ktorému zodpovedá stredový uhol $d\varphi$. Nech je F sila, ktorá je potrebná v bode A na prekonanie sily F_0 a trenia od bodu A_0 až po bod A . V bode B bude príslušná sila $F + dF$ väčšia o trenie

na oblúku AB . Preto $dF = \mu dN$, kde dN je normálový tlak na úseku AB . (Poznámka: V ďalších úvahách koeficient statického trenia pre jednoduchosť budeme značiť pomocou písmena μ bez indexu.) Sila F je funkciou uhla φ . Ako vektor môžeme ju písať takto: $\mathbf{F} = F\boldsymbol{\tau}$, kde $\boldsymbol{\tau}$ je tangenciálny vektor jednotkový. Potom $d\mathbf{F} = (dF)\boldsymbol{\tau} + Fd\boldsymbol{\tau} = (dF)\boldsymbol{\tau} - F\rho d\varphi$. Ako vidno aj z obrázka, normálový tlak na úseku AB je teda $dN = F d\varphi$, takže

$$dF = \mu dN = \mu F d\varphi$$

alebo

$$\frac{dF}{F} = \mu d\varphi$$

Integráciou tejto rovnice dostávame:

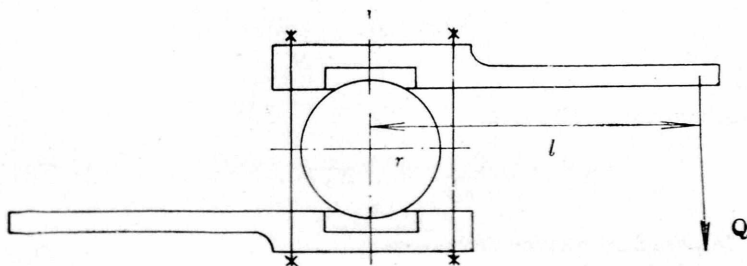
$$\ln \frac{F_1}{F_0} = \mu\varphi$$

$$F_1 = F_0 e^{\mu\varphi}$$

kde φ už je uhol remeniceu „opásaný“. Najväčšia sila, ktorú možno remeňom prenášať, teda je:

$$F = F_1 - F_0 = F_0(e^{\mu\varphi} - 1) \quad (5)$$

kde F_0 je napätie remeňa na strane povoľovania.



Obr. 4.36

Ak hnacia a hnaná remenica nemajú rovnaké polomery, ani uhly remeňom na oboch remenicách opášané nie sú rovnaké. V tom prípade vo vzorci (5) za uhol φ treba dosadiť z oboch uhlov vždy uhol menší. V skutočnosti najväčšia sila, ktorá sa môže remeňom prenášať, je o niečo menšia, lebo odstredivá sila znižuje normálový tlak medzi remeňom a remenicou.

Na spotrebu energie trením zakladá sa meranie výkonu motorov *Pronyho brzdou* (obr. 4.36). Pri jej používaní hnací hriadeľ motora polomeru r je zovretý do čelustí brzdy natoľko, aby sa motor otáčal ešte predpísanou rýchlosťou n

otáčok za jednotku času, a vahadlo brzdy je zaťažené závažím Q . Keď sa moment závažia Q rovná momentu trenia T , čiže ak je $Ql = Tr$ a zmysel momentov je vzájomne opačný, vahadlo pri otáčaní motora sa medzi nárazníkmi voľne vznáša. Práca vykonaná strojom pri jednom otočení hriadeľa je $2\pi rT$. Preto jeho výkon je:

$$N = 2\pi r n T = 2\pi n Q l \quad (6)$$

Úloha 2. Doska dĺžky l je opretá o zvislú stenu. Vypočítame najväčší odklon dosky od steny φ_0 , pri ktorom sa doska v tejto polohe ešte udrží, ak koeficient trenia na styku dosky a podlahy je μ_1 a na styku dosky a steny μ_2 .

Tiaž dosky nech je Q . Pri najväčšom odklone dosky od steny tiaž dosky je práve ešte v rovnováhe s normálovými reakciami a silami trenia na stykových miestach, takže sú ešte splnené podmienky rovnováhy: $\Sigma \mathbf{f} = 0$, $\Sigma \mathbf{D} = 0$, a statické trenie dosiahlo už svoju maximálnu hodnotu $T = \mu N$. Podľa obr. 4.37a pri hľadanom uhle φ_0 sú teda splnené rovnice

$$Q = T_2 + N_1$$

$$N_2 = T_1$$

$$aN_1 = \frac{a}{2} Q + bN_2$$

alebo, keďže $T_1 = \mu_1 N_1$ a $T_2 = \mu_2 N_2$, rovnice

$$N_1 = Q - \mu_2 N_2$$

$$N_2 = \mu_1 N_1$$

$$2aN_1 = aQ + 2bN_2$$

Z prvých dvoch rovníc vyplýva, že

$$N_1 = \frac{Q}{1 + \mu_1 \mu_2}, \quad N_2 = \frac{\mu_1 Q}{1 + \mu_1 \mu_2}$$

čo dosadené do poslednej rovnice dáva:

$$\frac{2a}{1 + \mu_1 \mu_2} = a + \frac{2b\mu_1}{1 + \mu_1 \mu_2}$$

$$a(1 - \mu_1 \mu_2) = 2b\mu_1$$

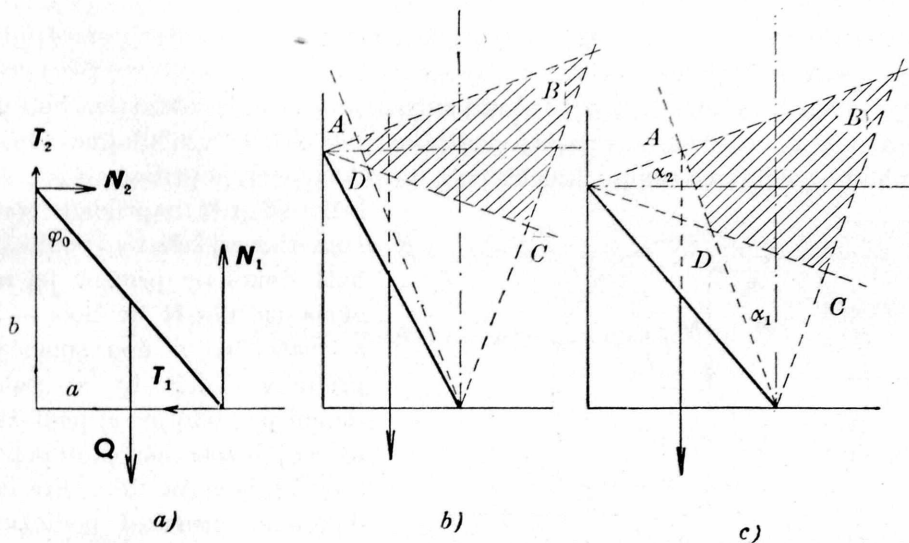
teda

$$\operatorname{tg} \varphi_0 = \frac{a}{b} = \frac{2\mu_1}{1 - \mu_1 \mu_2}$$

Pre $\mu_1 = \mu_2 = 0,36$ vychádza: $\operatorname{tg} \varphi_0 = 0,83$, $\varphi_0 = 40^\circ$.

Úlohu môžeme riešiť aj pomocou kuželov trenia. Doska sa udrží opretá o stenu, pokiaľ priamka jej tiaže pretína spoločný priestor kuželov trenia v oboch dotykových bodoch (na obr. 4.37b a 4.37c sú to štvoruholníky $ABCD$), pretože tiaž dosky možno v tom prípade rozložiť ešte na dve zložky $\mathbf{f}_1$ a $\mathbf{f}_2$ tak, že priamky týchto zložiek prechádzajú cez

koncové body dosky a nachádzajú sa vnútri príslušných kuželov trenia. Keď uhol φ zväčšujeme, dolný koniec dosky sa od steny vzdaluje rýchlejšie ako priamka tiaže dosky.



Obr. 4.37

Vzhľadom na štvoruholník $ABCD$ sa táto priamka posúva preto vľavo, a v kritickej polohe dosky prechádza cez bod A . Podľa obr. 4.37c sú potom splnené rovnice

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{a}{2h} = \frac{b \operatorname{tg} \varphi_0}{2h}$$

$$\operatorname{tg} \alpha_2 = \frac{2(h-b)}{a} = \frac{2(h-b)}{b \operatorname{tg} \varphi_0}$$

kde h je výška bodu A nad podlahou. Podľa prvej rovnice je:

$$b = \frac{2h \operatorname{tg} \alpha_1}{\operatorname{tg} \varphi_0}$$

takže druhá rovnica je tiež

$$2h \operatorname{tg} \alpha_1 \operatorname{tg} \alpha_2 = 2 \left(h - \frac{2h \operatorname{tg} \alpha_1}{\operatorname{tg} \varphi_0} \right)$$

$$\operatorname{tg} \alpha_1 \operatorname{tg} \alpha_2 = 1 - \frac{2 \operatorname{tg} \alpha_1}{\operatorname{tg} \varphi_0}$$

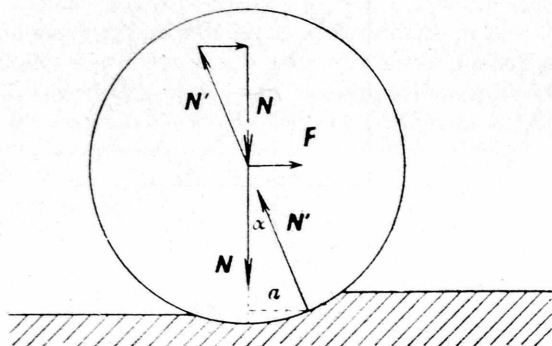
alebo

$$\operatorname{tg} \varphi_0 = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha_1}{1 - \operatorname{tg} \alpha_1 \operatorname{tg} \alpha_2} = \frac{2\mu_1}{1 - \mu_1 \mu_2}$$

Doteraz sme sa zaoberali len trením pri klízaní telesa po telese. Príčinou tohto trenia v šmyku je drsnosť stýkajúcich sa povrchov. Oblé teleso (valec,

guľa, kužel, koleso) môže sa však po podložke aj valiť. Pri valivom pohybe telesa po inom telese stýkajúce sa body obidvoch telies sú v relatívnom pokoji, čo má za následok, že *trenie pri valivom pohybe* (statické aj kinetické) je menšie a jeho príčinou je nie vždy dokonale pružná deformácia vo všeobecnosti obidvoch k sebe pritláčaných telies.

Ako príklad majme na mysli veľmi tvrdý a pružný valec, ktorý sa valí po vodorovnej a nedokonale pružnej podložke (obr. 4.38), a hľadáme silu F potrebnú na udržanie rovnomerného pohybu. Valec nech je pritláčaný k podložke silou N (napríklad vlastnou tiažou). Keby podložka bola dokonale pružná, jej reakcia na silu N by bola $-N$ a mala by s ňou spoločnú priamku, takže by sa valec mohol po vodorovnej podložke už svojou zotrvačnosťou pohybovať ľubovoľne dlho. Pre nedokonalú pružnosť podložky, ako aj vplyvom javu dopružovania (za valcom je podložka čiastočne trvale deformovaná



Obr. 4.38

a čiastočne sa ešte dopružuje) pôsobisko reakcie je posunuté dopredu. Preto na udržanie pohybu je potrebná sila F , ktorá vyrovnáva spoločný účinok normálovej tlakovej sily N a reakcie podložky N' . Teda $F = -(N + N')$ alebo $F + N + N' = 0$. Z príslušného silového trojuholníka vyplýva (obr. 4.38), že abs. hodnota sily F je

$$F = N \operatorname{tg} \alpha \doteq N \sin \alpha = N \frac{a}{r}$$

kde r je polomer valca a a vzdialenosť pôsobiska reakcie podložky od zvislej priamky prechádzajúcej cez stred valca.

Tangenciálna zložka reakcie podložky N' sa nazýva *valivé trenie* a označuje sa T_v . Keďže je $T_v = -F$, to je:

$$T_v = F = N \frac{a}{r} \quad (7)$$

Podľa analógie so vzorcami (1) a (2) podiel a/r sa nazýva koeficient valivého trenia a označuje sa μ_v , teda

$$\mu_v = \frac{a}{r} \quad (8)$$

Na rozdiel od koeficientov statického a kinetického trenia v šmyku μ_0 a μ' koeficient valivého trenia μ_v prísne vzaté nie je látkovou konštantou. Zrejme je však tým väčší, čím menej súmerná je deformácia podložky pod valcom. Pretože s rastúcim polomerom valca pri nemeniacom sa zaťažení vzdialenosť a sa zväčšuje, koeficient valivého trenia od polomeru valca prakticky vôbec nezávisí. So zaťažením valca sa však zväčšuje, lebo v dôsledku toho sa zväčšuje vzdialenosť a , s výškou valca sa však znižuje, pretože táto má na vzdialenosť a práve obrátený vplyv. Práve pre túto príčinu kolesá vozidiel majú mať dostatočne široké obruče.

Príklady koeficientov kinetického valivého trenia obsahuje *tabuľka 4.2*.

Tabuľka 4.2

Koeficienty kinetického trenia valivého

	μ	Platí pre	μ
Drevo na dreve	0,05—0,5	Železné kolesá na koľajniciach	0,002—0,005
Oceľ na oceli	0,002—0,05	Gumové kolesá na betónovej vozovke	0,015—0,020
Kalené guľôčky na kalených krúžkoch	0,001—0,005	Gumové kolesá na asfaltovej vozovke	0,02—0,03

Hodnoty koeficientov valivého trenia uvedené v *tab. 4.2* dokazujú, že valivé trenie je omnoho menšie ako šmykové trenie, najmä ak podložka aj valiace sa teleso sú z tvrdého a pružného materiálu. Prirodzeným dôsledkom toho je používanie kolies na vozidlách a rôznych iných transportných zariadeniach, zhotovovanie guľkových a valčekových ložísk a pod.

Pri vozidlách, keď ich kolesá majú obyčajné ložiská, prejavuje sa v ložiskách, pravda, aj šmykové trenie. Jeho vplyv na celkovú silu potrebnú na udržanie pohybu vyplýva z tejto jednoduchéj úvahy: Koleso nech má polomer R a polomer osi nech je r . Koeficient valivého trenia na styku kolesa a vozovky nech je μ_v a koeficient šmykového trenia v ložiskách μ_s . Ak koleso nesie tiaž Q (tiaž kolesa pre jednoduchosť zanedbáme), pri jednom otočení kolesa sila F ťahajúca koleso vykoná prácu

$$2\pi R\mu_v Q + 2\pi r\mu_s Q = 2\pi RF$$

takže $F = \left(\mu_v + \frac{r}{R} \mu_s\right) Q = \mu Q$. K výslednému koeficientu trenia $\mu = \mu_v + \frac{r}{R} \mu_s$ trenie v ložisku prispieva teda tým menšou hodnotou, čím väčší je polomer kolesa R .

Úlohy na cvičenie

1. Za aký čas sklúzne teleso po naklonenej rovine dlhej $d = 5$ m, ktorá s vodorovnou rovinou zvierá uhol $\alpha = 45^\circ$, keď uhol trenia telesa po naklonenej rovine $\alpha' = 30^\circ$? (1,85 s)

2. Teleso kĺže po rovine sklonenej pod uhlom $\alpha = 30^\circ$ bez začiatočnej rýchlosti. Koeficient trenia je 0,1. Akú rýchlosť má po prebehnutí dráhy $s = 2$ m od začiatku pohybu? (4,02 m/s)

3. Teleso tiaže Q sa po náraze šmýkalo po vodorovnej rovine, za 5 s prešlo dráhu 24,5 m a zastalo. Aký je koeficient trenia telesa na podložke? ($\mu = 0,2$)

4. Ku kolesu s polomerom r , ktoré sa otáča uhlovou rýchlosťou ω_0 okolo osi, pritlačíme radiálnou silou N brzdu. Za čas t sa koleso trením zastaví. Aký je koeficient trenia, keď moment zotrvačnosti kolesa je J ? ($\mu = J\omega_0/Nrt$)

5. Motocyklista môže na rovnej dráhe (nie naklonenej) urobiť zákrutu s polomerom $r_1 = 10$ m ešte rýchlosťou $v_1 = 20$ km/h, aby sa práve nešmykol. Akou najmenšou rýchlosťou v_2 sa musí pohybovať na vnútornej kolmej stene kruhového valca s polomerom $r_2 = 5$ m z toho istého materiálu ako rovná dráha, aby opisoval horizontálnu dráhu bez toho, aby sa zošmykol? ($v_2 = 45$ km/h)

5. PRUŽNOSŤ A PEVNOSŤ TUHÝCH LÁTOK

5.1. Všeobecné vlastnosti tuhých látok. V predchádzajúcich článkoch sme sa zaoberali pohybom a podmienkami rovnováhy pevných telies, o ktorých sme predpokladali, že ich tvar a objem sa za účinku vonkajších síl vôbec nemenia. Takéto telesá sme nazvali dokonale tuhými. Skutočné pevné telesá nie sú však nikdy dokonale tuhé. Skutočné pevné teleso za účinku vonkajších síl mení vo všeobecnosti svoj objem aj svoj tvar; hovoríme, že sa *deformuje* (pretvára). Keď je účinok vonkajších síl zrušený, nadobúda teleso objem a tvar, ktoré sa od pôvodného objemu a tvaru líšia niekedy len nepozorovateľne málo. Teleso, ktoré túto vlastnosť prejavuje v plnej miere, volá sa *dokonale pružné* (elastické). Teleso, ktoré zachováva úplne svoj deformovaný tvar, nazýva sa dokonale *nepružné* (plastické). Skutočné pevné telesá sú však len viac alebo menej pružné. Veľmi pružná je napríklad oceľ a skoro nijakú pružnosť nemá modelárska hlina.

Skutočné pružné pevné teleso, ak bolo deformované, po zrušení vonkajších síl nadobúda svoj pôvodný objem a tvar obyčajne len čiastočne. Jeho deformáciu môžeme preto považovať za súčet deformácie *elastickej*, ktorá sa po odstránení vonkajších síl stratí, a *plastickej*, ktorá ostáva. Za *mieru pružnosti* pevných telies sa berie podiel deformácie elastickej a celkovej. Tento podiel závisí však od veľkosti vonkajších síl použitých na deformáciu telesa. Pri