

vektor bodu A vzhľadom na bod B . Táto dvojica spolu s druhou pridanou (preloženou) silou $\mathbf{f}_1 = \mathbf{f}$ silu $\mathbf{f}$ úplne nahrádzujú. Platí teda veta:

Silu pôsobiacu na tuhé teleso môžeme preniesť do iného jeho bodu, keď súčasne pridáme dvojicu s momentom rovnajúcim sa momentu sily danej vzhľadom na jej nové pôsobisko.

Keď na tuhé teleso v jeho rôznych bodoch s polohovými vektormi vzhľadom na zvolený bod telesa $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$ až $\mathbf{r}_n$ účinkuje spolu n síl, $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2$ až $\mathbf{f}_n$, môžeme všetky preniesť do tohto bodu a nahradiť ich tam ich súčtom $\mathbf{F} = \Sigma \mathbf{f}_i$, keď súčasne pridáme dvojice s momentami $\mathbf{D}_1 = \mathbf{r}_1 \times \mathbf{f}_1$, $\mathbf{D}_2 = \mathbf{r}_2 \times \mathbf{f}_2$ až $\mathbf{D}_n = \mathbf{r}_n \times \mathbf{f}_n$, ktorých súčet je $\mathbf{D} = \Sigma \mathbf{r}_i \times \mathbf{f}_i$ a ktoré možno nahradiť jedinou dvojicou s týmto momentom (pozri čl. 4.5).

Lubovoľný počet síl účinkujúcich na tuhé teleso v jeho rôznych bodoch môžeme teda vždy nahradiť jednou silou $\mathbf{F}$, účinkujúcou v ľubovoľne zvolenom bode telesa a rovnajúcou sa ich súčtu ako vektorov, $\mathbf{F} = \Sigma \mathbf{f}_i$, a jedinou dvojicou s momentom $\mathbf{D}$, ktorý sa rovná súčtu momentov všetkých daných síl vzhľadom na zvolené pôsobisko sily $\mathbf{F}$, $\mathbf{D} = \Sigma \mathbf{r}_i \times \mathbf{f}_i$.

4.5. Pohybové rovnice a podmienky rovnováhy tuhého telesa. Tuhé teleso sa od sústavy voľných hmotných bodov líši len tým, že sily pôsobiace medzi hmotnými elementami tuhého telesa, podmieňujúce tvarovú stálosť tuhého telesa, sú veľmi mohutné. Preto pre pohyb tuhého telesa môžeme použiť výsledky odvodené pre sústavu hmotných bodov s vnútornými silami:

$$\mathbf{F} = \sum \mathbf{f}_i = M \mathbf{a}^* = \frac{d\mathbf{H}}{dt} \quad (1)$$

$$\mathbf{D} = \sum (\mathbf{r}_i \times \mathbf{f}_i) = \frac{d\mathbf{G}}{dt} \quad (2)$$

podľa ktorých:

1. *za účinku vonkajších síl sa ťažisko tuhého telesa pohybuje tak, ako keby všetky sily účinkovali v jeho ťažisku a celá hmota bola sústredená v ťažisku (veta o ťažisku),*

2. *súčet momentov všetkých vonkajších síl vzhľadom na ľubovoľný bod sa rovná časovej zmene celkového momentu hybnosti telesa vzhľadom na tenže bod (veta momentová).*

Keď je teleso v pokoji, rýchlosť a zrýchlenie jeho ťažiska sa rovnajú nule, teda podľa rovnice (1) aj súčet všetkých síl účinkujúcich na teleso sa rovná nule. Keď je teleso v pokoji, aj celkový moment jeho hybnosti, a preto aj jeho časová zmena sa rovnajú nule. Podľa rovnice (2) teda aj súčet momentov všetkých vonkajších síl účinkujúcich na teleso sa rovná nule, a to vzhľadom na každý bod, lebo ak súčet vonkajších síl sa rovná nule, súčet ich momentov

vzhľadom na každý bod je rovnaký. Podmienky rovnováhy tuhého telesa sú teda:

$$\sum \mathbf{F}_i = 0 \quad (3)$$

1. keď má byť teleso v rovnováhe, súčet vonkajších síl účinkujúcich na teleso sa musí rovnať nule,

$$\sum \mathbf{D}_i = 0 \quad (4)$$

2. keď má byť teleso v rovnováhe, aj súčet momentov vonkajších síl vzhľadom na ľubovoľný bod sa musí rovnať nule.

Poznámka: Pri riešení pohybu alebo pri vyšetrovaní rovnováhy tuhého telesa, ktoré je v styku s inými telesami, v rovniciach tohto článku v súčtoch vonkajších síl a ich momentov treba, pochopiteľne, rátať aj so silami, ktoré sa objavujú na styku vždy dvoch telies (reakcia podložky, ložiska a pod.).

Moment hybnosti $\mathbf{G}$, vystupujúci v druhej pohybovej rovnici tuhého telesa závisí od rýchlostí všetkých hmotných elementov telesa, a prirodzene, aj od voľby bodu, na ktorý sme sa rozhodli vzťahovať momenty $\mathbf{D}_i$ vonkajších síl pôsobiacich na teleso, a teda aj moment hybnosti telesa $\mathbf{G}$. Podľa vzorca (1.9.2), str. 48, ak rýchlosť ľubovoľne zvoleného bodu telesa je $\mathbf{v}_0$, rýchlosť ktoréhokolvek iného bodu telesa je $\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_0 + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'_i$ (obr. 4.7). Moment hybnosti tuhého telesa je teda

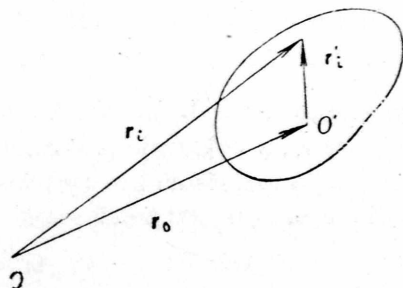
$$\begin{aligned} \mathbf{G} &= \sum \mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{v}_i = \sum \mathbf{r}_i \times m_i (\mathbf{v}_0 + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'_i) = \\ &= (\sum m_i \mathbf{r}_i) \times \mathbf{v}_0 + \sum m_i \mathbf{r}_i \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'_i) \end{aligned} \quad (5)$$

Tento všeobecne platný, no dosť zložitý vzorec pre moment hybnosti tuhého telesa sa podstatne zjednoduší, ak body O a O' , na ktoré sa vzťahujú vektory $\mathbf{r}_i$ a $\mathbf{r}'_i$, stotožníme s okamžitou polohou ťažiska telesa. Potom totiž $\mathbf{r}'_i = \mathbf{r}_i$ a okrem toho $\sum m_i \mathbf{r}_i = \sum m_i \mathbf{r}'_i = 0$, takže moment hybnosti tuhého telesa vzhľadom na okamžitú polohu jeho ťažiska $\mathbf{G}^*$ je len

$$\begin{aligned} \mathbf{G}^* &= \sum m_i \mathbf{r}_i \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i) = \\ &= \sum m_i (r_i^2 \boldsymbol{\omega} - \mathbf{r}_i \mathbf{r}_i \cdot \boldsymbol{\omega}) \end{aligned} \quad (6)$$

a nezávisí od rýchlosti pohybu ťažiska.

Ak sme sa teda rozhodli moment vonkajších síl účinkujúcich na tuhé teleso a moment hybnosti telesa vzťahovať na okamžitú polohu ťažiska telesa (budeme ich v tom prípade označovať $\mathbf{D}^*$ a $\mathbf{G}^*$), môžeme v druhej pohybovej rovnici tuhého telesa vystupujúci moment hybnosti telesa a jeho deriváciu podľa času počítat tak, ako keby sa ťažisko nepohybovalo.



Obr. 4.7

Pri telesách upevnených tak, že sa nemôže pohybovať buď jeden bod, buď celá priamka telesa, vo vyjadrení momentu hybnosti telesa rovnaké zjednodušenie dosiahneme, ak bod O aj bod O' (obr. 4.7) stotožníme s nehybným bodom telesa. Vo vzorci (5) potom ako v predošlom prípade je $\mathbf{r}'_i = \mathbf{r}_i$, no namiesto toho, aby bolo $\sum m_i \mathbf{r}_i \cdot \mathbf{r}_i = 0$, teraz $\mathbf{v}_0 = 0$, čo však na výraz pre moment hybnosti telesa má rovnaký vplyv.

Vzorec (6) správne teda vyjadruje moment hybnosti tuhého telesa $\mathbf{G}$ aj vzhľadom na jeho nehybný bod, čiže aj vzhľadom na nehybný bod telesa je

$$\mathbf{G} = \sum m_i (\mathbf{r}_i^2 \boldsymbol{\omega} - \mathbf{r}_i \mathbf{r}_i \cdot \boldsymbol{\omega}) \quad (7)$$

no vektory $\mathbf{r}_i$ sa teraz nevzťahujú na okamžitú polohu ťažiska telesa, ale na niektorý jeho nehybný bod.

Vzhľadom na vzorce (6) a (7), ktoré v nasledujúcom článku upravíme na ešte jednoduchší tvar, pri riešení pohybu celkom voľného telesa momenty $\mathbf{D}$ a $\mathbf{G}$, ktoré vystupujú v jeho druhej pohybovej rovnici, vzťahujeme obidva na okamžitú polohu ťažiska telesa, ale pri riešení pohybu telesa s nehybným bodom s určitou výhodou na tento bod.

4.6. Tenzor hybnosti. Vzorec (4.5.7) odvodený v predošlom článku a vyjadrujúci moment hybnosti tuhého telesa vzhľadom na jeho nehybný bod, môžeme upraviť takto

$$\mathbf{G} = \sum m_i (\mathbf{r}_i^2 \boldsymbol{\omega} - \mathbf{r}_i \mathbf{r}_i \cdot \boldsymbol{\omega}) = \sum m_i (\mathbf{r}_i^2 \mathbf{I} - \mathbf{r}_i \mathbf{r}_i) \cdot \boldsymbol{\omega}$$

kde $\mathbf{I} = \mathbf{ii} + \mathbf{jj} + \mathbf{kk}$ je tenzor identity a $\mathbf{r}_i \mathbf{r}_i$ je diadický súčin vektorov $\mathbf{r}_i$,

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_i \mathbf{r}_i = & x^2 \mathbf{ii} + xy \mathbf{ij} + xz \mathbf{ik} + \\ & + yx \mathbf{ji} + y^2 \mathbf{jj} + yz \mathbf{jk} + \\ & + zx \mathbf{ki} + zy \mathbf{kj} + z^2 \mathbf{kk} \end{aligned}$$

Symetrický tenzor druhého stupňa

$$\mathbf{T} = \sum m_i (\mathbf{r}_i^2 \mathbf{I} - \mathbf{r}_i \mathbf{r}_i) \quad (1)$$

volá sa tenzor hybnosti tuhého telesa v tom jeho bode, na ktorý sa vzťahujú vektory $\mathbf{r}_i$, a vyjadruje (spôsobom, ktorý pre dynamiku tuhého telesa celkom postačuje) rozloženie hmoty telesa okolo tohto bodu.

Moment hybnosti tuhého telesa vzhľadom na jeho nehybný bod je teda aj

$$\mathbf{G} = \mathbf{T} \cdot \boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{T} \quad (2)$$

a pretože vzorec (4.5.6) a (4.5.7) majú rovnaký tvar, moment hybnosti tuhého telesa vzhľadom na okamžitú polohu ťažiska telesa je

$$\mathbf{G}^* = \mathbf{T}^* \cdot \boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{T}^* \quad (3)$$

kde $\mathbf{T}^*$ je tenzor hybnosti tuhého telesa v jeho ťažisku.