Pri telesách upevnených tak, že sa nemôže pohybovať buď jeden bod, buď celá priamka telesa, vo vyjadrení momentu hybnosti telesa rovnaké zjednodušenie dosiahneme, ak bod O aj bod O' *(obr. 4.7)* stotožníme s nehybným bodom telesa. Vo vzorci (5) potom ako v predošlom prípade je $\boldsymbol{r}'_i = \boldsymbol{r}_i$, no namiesto toho, aby bolo $\Sigma m_r \boldsymbol{r}_r = 0$, teraz $\boldsymbol{v}_0 = 0$, čo však na výraz pre moment hybnosti telesa má rovnaký vplyv.

Vzorec (6) správne teda vyjadruje moment hybnosti tuhého telesa $\boldsymbol{G}$ aj vzhľadom na jeho nehybný bod, čiže aj vzhľadom na nehybný bod telesa je

$$\boldsymbol{G} = \sum m_i(r_i^2\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{r}_i\boldsymbol{r}_i \,.\, \boldsymbol{\omega}) \tag{7}$$

no vektory $\boldsymbol{r}_r$ sa teraz nevzťahujú na okamžitú polohu ťažiska telesa, ale na niektorý jeho nehybný bod.

Vzhľadom na vzorce (6) a (7), ktoré v nasledujúcom článku upravíme na ešte jednoduchší tvar, pri riešení pohybu celkom voľného telesa momenty $\boldsymbol{D}$ a $\boldsymbol{G}$, ktoré vystupujú v jeho druhej pohybovej rovnici, vzťahujeme obidva na okamžitú polohu ťažiska telesa, ale pri riešení pohybu telesa s nehybným bodom s určitou výhodou na tento bod.

4.6. Tenzor hybnosti. Vzorec (4.5.7) odvodený v predošlom článku a vyjadrujúci moment hybnosti tuhého telesa vzhľadom na jeho nehybný bod, môžeme upraviť takto

$$\boldsymbol{G} = \sum m_i(r_i^2\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{r}_i\boldsymbol{r}_i \,.\, \boldsymbol{\omega}) = \sum m_i(r_i^2\boldsymbol{I} - \boldsymbol{r}_i\boldsymbol{r}_i) \,.\, \omega$$

kde $\boldsymbol{I} = \boldsymbol{ii} + \boldsymbol{jj} + \boldsymbol{kk}$ je tenzor identity a $\boldsymbol{r}_i\boldsymbol{r}_i$ je diadický súčin vektorov $\boldsymbol{r}_i$,

$$\begin{aligned} & x^2\boldsymbol{ii} + xy\boldsymbol{ij} + xz\boldsymbol{ik} + \\ \boldsymbol{r}_i\boldsymbol{r}_i = & + yx\boldsymbol{ji} + y^2\boldsymbol{jj} + yz\boldsymbol{jk} + \\ & + zx\boldsymbol{ki} + zy\boldsymbol{kj} + z^2\boldsymbol{kk} \end{aligned}$$

Symetrický tenzor druhého stupňa

$$\boldsymbol{T} = \sum m_i(r_i^2\boldsymbol{I} - \boldsymbol{r}_i\boldsymbol{r}_i) \tag{1}$$

volá sa tenzor hybnosti tuhého telesa v tom jeho bode, na ktorý sa vzťahujú vektory $\boldsymbol{r}_i$, a vyjadruje (spôsobom, ktorý pre dynamiku tuhého telesa celkom postačuje) rozloženie hmoty telesa okolo tohto bodu.

Moment hybnosti tuhého telesa vzhľadom na jeho nehybný bod je teda aj

$$\boldsymbol{G} = \boldsymbol{T} \,.\, \boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega} \,.\, \boldsymbol{T} \tag{2}$$

a pretože vzorec (4.5.6) a (4.5.7) majú rovnaký tvar, moment hybnosti tuhého telesa vzhľadom na okamžitú polohu ťažiska telesa je

$$\boldsymbol{G}^* = \boldsymbol{T}^* \,.\, \boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega} \,.\, \boldsymbol{T}^* \tag{3}$$

kde $\boldsymbol{T}^*$ je tenzor hybnosti tuhého telesa v jeho ťažisku.

Vypočítame ešte v druhej pohybovej rovnici tuhého telesa vystupujúce derivácie vektorov $\mathbf{G}$ a $\mathbf{G}^*$ podľa času, ktoré v zmysle tejto rovnice sú absolútne derivácie. Použitím vzorca (1.10.4), str. 51, ktorý vyjadruje súvis medzi tzv. absolútnou a relatívnou deriváciou ľubovoľného vektora podľa času, dostávame

$$\left(\frac{\mathrm{d}\mathbf{G}}{\mathrm{d}t}\right)_a = \left(\frac{\mathrm{d}(\boldsymbol{\omega}\,.\,\mathbf{T})}{\mathrm{d}t}\right)_a = \boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\,.\,\mathbf{T}) + \left(\frac{\mathrm{d}(\boldsymbol{\omega}\,.\,\mathbf{T})}{\mathrm{d}t}\right)_r =$$
$$= \boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\,.\,\mathbf{T}) + \boldsymbol{\epsilon}\,.\,\mathbf{T} \tag{4}$$

lebo tenzor $\mathbf{T}$ vzhľadom na teleso, na ktoré sa vzťahuje, je veličina konštantná. Podobne je

$$\left(\frac{\mathrm{d}\mathbf{G}^*}{\mathrm{d}t}\right)_a = \boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\,.\,\mathbf{T}^*) + \boldsymbol{\epsilon}\,.\,\mathbf{T}^* \tag{5}$$

kde $\mathbf{T}^*$ je tenzor hybnosti v ťažisku telesa a $\boldsymbol{\epsilon}$ v obidvoch posledných vzorcoch je uhlové zrýchlenie.

Druhú pohybovú rovnicu tuhého telesa úplne voľného alebo akokoľvek upevneného môžeme teda písať vždy v tvare

$$\mathbf{D}^* = \boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\,.\,\mathbf{T}^*) + \boldsymbol{\epsilon}\,.\,\mathbf{T}^* \tag{6}$$

kde $\mathbf{D}^*$ je súčet momentov všetkých vonkajších síl pôsobiacich na teleso vzhľadom na okamžitú polohu jeho ťažiska.

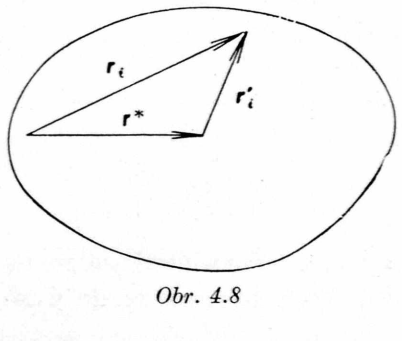
Ale keď je teleso upevnené tak, že aspoň jeden bod telesa je nehybný, môžeme ju písať aj v tvare

$$\mathbf{D} = \boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\,.\,\mathbf{T}) + \boldsymbol{\epsilon}\,.\,\mathbf{T} \tag{7}$$

kde $\mathbf{D}$ je celkový moment vonkajších síl pôsobiacich na teleso vzhľadom na niektorý nehybný bod telesa a tenzor $\mathbf{T}$ sa vzťahuje na ten istý bod.

Rovnice (6) a (7) sú Eulerove pohybové rovnice tuhého telesa napísané v tvare vektorovom.

P o z n á m k a : Pre výpočet tenzoru hybnosti v ľubovoľnom bode tuhého telesa stačí poznať tenzor hybnosti v jeho ťažisku *(obr. 4.8)*



Obr. 4.8

$$\mathbf{T} = \sum m_i(r_i^2\mathbf{I} - \mathbf{r}_i\mathbf{r}_i) = \sum m_i[(\mathbf{r}^* + \mathbf{r}'_i)^2\mathbf{I} - (\mathbf{r}^* + \mathbf{r}'_i)\,(\mathbf{r}^* + \mathbf{r}'_i)] =$$
$$= \sum m_i[(r^{*2} + 2\mathbf{r}^*_i\,.\,\mathbf{r}'_i + r'^2_i)\,\mathbf{I} - (\mathbf{r}^*\mathbf{r}^* + \mathbf{r}'_i\mathbf{r}^* + \mathbf{r}^*\mathbf{r}'_i + \mathbf{r}'_i\mathbf{r}'_i)] =$$
$$= \sum m_i[(r^{*2} + r'^2_i)\,\mathbf{I} - (\mathbf{r}^*\mathbf{r}^* + \mathbf{r}'_i\mathbf{r}'_i)] = M(r^{*2}\mathbf{I} - \mathbf{r}^*\mathbf{r}^*) + \mathbf{T}^* \tag{8}$$

lebo $\sum m_i\mathbf{r}'_i = 0$.

Tenzor hybnosti v ľubovoľnom bode tuhého telesa sa rovná tenzoru hybnosti v ťažisku zväčšenému o príspevok ťažiska so všetkou hmotou telesa v ňom sústredenou (Steinerova veta vo všeobecnom znení).

4.7. Pohyb telesa uloženého na pevnej osi. Moment sily vzhľadom na os. Moment zotrvačnosti. Pôsobisko sily $\boldsymbol{f}$ vzhľadom na bod O_1 na priamke (osi) nech má polohový vektor $\boldsymbol{r}_1$ *(obr. 4.9)*, vzhľadom na bod O_2 tej istej priamky polohový vektor $\boldsymbol{r}_2$. Momenty sily $\boldsymbol{f}$ vzhľadom na tieto dva body sú potom: $\boldsymbol{D}_1 = \boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{f}$, $\boldsymbol{D}_2 = \boldsymbol{r}_2 \times \boldsymbol{f} = (\boldsymbol{r}_{21} + \boldsymbol{r}_1) \times \boldsymbol{f}$. Ich priemety na priamku P, v ktorej sme zvolili jednotkový vektor $\boldsymbol{\rho}$, sú

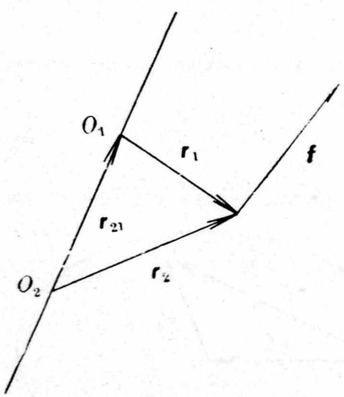
$$(\boldsymbol{D}_1)_\varrho = [(\boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{f}) \cdot \boldsymbol{\rho}]\, \boldsymbol{\rho}$$

$$(\boldsymbol{D}_2)_\varrho = [(\boldsymbol{r}_2 \times \boldsymbol{f}) \cdot \boldsymbol{\rho}]\, \boldsymbol{\rho} = \{[(\boldsymbol{r}_{21} + \boldsymbol{r}_1) \times \boldsymbol{f}] \cdot \boldsymbol{\rho}\}\, \boldsymbol{\rho} = (D_1)_\varrho$$

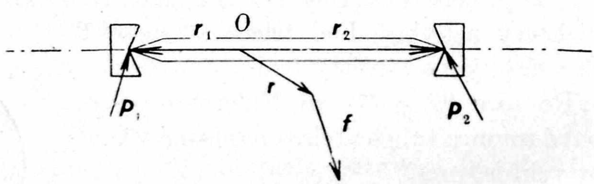
lebo súčin $\boldsymbol{r}_{21} \times \boldsymbol{f}$ je na priamku P kolmý.

Dostali sme výsledok: *Priemet momentu sily vzhľadom na bod priamky do smeru priamky nezávisí od polohy bodu zvoleného na priamke. Volá sa moment sily vzhľadom na priamku* (os).

Keď na tuhé teleso, ktoré je upevnené tak, že sa môže otáčať len okolo nehybnej osi, účinkuje vonkajšia sila $\boldsymbol{f}$, účinkujú na teleso ešte reakcie ložísk $\boldsymbol{P}_1$ a $\boldsymbol{P}_2$. Polohový vektor prvého ložiska vzhľadom na ľubovoľný bod osi nech je $\boldsymbol{r}_1$ *(obr. 4.10)*, druhého ložiska $\boldsymbol{r}_2$, polohový vektor pôsobiska vonkajšej sily $\boldsymbol{f}$ vzhľadom na ten istý bod nech je $\boldsymbol{r}$. Podľa vzorca (4.5.2) moment všetkých na teleso účinkujúcich síl rovná sa derivácii momentu hybnosti telesa podľa času. Preto ak berieme do úvahy aj vzorec (4.6.4), môžeme napísať rovnicu



Obr. 4.9



Obr. 4.10

$$\boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{P}_1 + \boldsymbol{r}_2 \times \boldsymbol{P}_2 + \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{f} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{G}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}(\boldsymbol{\omega} \,.\, \boldsymbol{T})}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \,.\, \boldsymbol{T}) + \boldsymbol{\epsilon} \,.\, \boldsymbol{T} \qquad (1)$$

kde $\boldsymbol{T}$ je tenzor hybnosti vo zvolenom bode osi. Z rovnosti vektorov predstavujúcich ľavú a pravú stranu rovnice (1) vyplýva rovnosť projekcií týchto