

Tenzor hybnosti v ľubovoľnom bode tuhého telesa sa rovná tenzoru hybnosti v ťažisku zväčšenému o príspevok ťažiska so všetkou hmotou telesa v ňom sústredenou (Steinerova veta vo všeobecnom znení).

4.7. Pohyb telesa uloženého na pevnej osi. Moment sily vzhľadom na os. Moment zotrvačnosti. Pôsobisko sily $\mathbf{f}$ vzhľadom na bod O_1 na priamke (osi) nech má polohový vektor $\mathbf{r}_1$ (obr. 4.9), vzhľadom na bod O_2 tej istej priamky polohový vektor $\mathbf{r}_2$. Momenty sily $\mathbf{f}$ vzhľadom na tieto dva body sú potom: $\mathbf{D}_1 = \mathbf{r}_1 \times \mathbf{f}$, $\mathbf{D}_2 = \mathbf{r}_2 \times \mathbf{f} = (\mathbf{r}_{21} + \mathbf{r}_1) \times \mathbf{f}$. Ich priemety na priamku P , v ktorej sme zvolili jednotkový vektor $\boldsymbol{\rho}$, sú

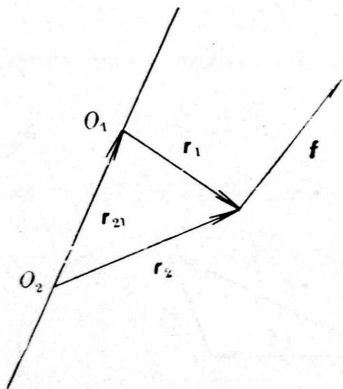
$$(\mathbf{D}_1)_\rho = [(\mathbf{r}_1 \times \mathbf{f}) \cdot \boldsymbol{\rho}] \boldsymbol{\rho}$$

$$(\mathbf{D}_2)_\rho = [(\mathbf{r}_2 \times \mathbf{f}) \cdot \boldsymbol{\rho}] \boldsymbol{\rho} = \{[(\mathbf{r}_{21} + \mathbf{r}_1) \times \mathbf{f}] \cdot \boldsymbol{\rho}\} \boldsymbol{\rho} = (\mathbf{D}_1)_\rho$$

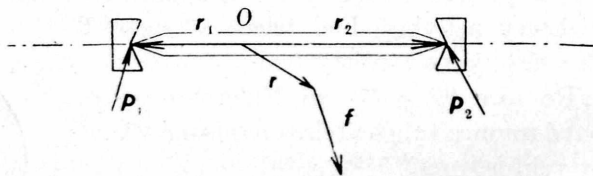
lebo súčin $\mathbf{r}_{21} \times \mathbf{f}$ je na priamku P kolmý.

Dostali sme výsledok: *Priemet momentu sily vzhľadom na bod priamky do smeru priamky nezávisí od polohy bodu zvoleného na priamke. Volá sa moment sily vzhľadom na priamku (os).*

Keď na tuhé teleso, ktoré je upevnené tak, že sa môže otáčať len okolo nehybnej osi, účinkuje vonkajšia sila $\mathbf{f}$, účinkujú na teleso ešte reakcie ložísk $\mathbf{R}_1$ a $\mathbf{P}_2$. Polohový vektor prvého ložiska vzhľadom na ľubovoľný bod osi nech je $\mathbf{r}_1$ (obr. 4.10), druhého ložiska $\mathbf{r}_2$, polohový vektor pôsobiska vonkajšej sily $\mathbf{f}$ vzhľadom na ten istý bod nech je $\mathbf{r}$. Podľa vzorca (4.5.2) moment všetkých



Obr. 4.9



Obr. 4.10

na teleso účinkujúcich síl rovná sa derivácii momentu hybnosti telesa podľa času. Preto ak berieme do úvahy aj vzorec (4.6.4), môžeme napísať rovnicu

$$\mathbf{r}_1 \times \mathbf{P}_1 + \mathbf{r}_2 \times \mathbf{P}_2 + \mathbf{r} \times \mathbf{f} = \frac{d\mathbf{G}}{dt} = \frac{d(\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{T})}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{T}) + \boldsymbol{\epsilon} \cdot \mathbf{T} \quad (1)$$

kde $\mathbf{T}$ je tenzor hybnosti vo zvolenom bode osi. Z rovnosti vektorov predstavujúcich ľavú a pravú stranu rovnice (1) vyplýva rovnosť projekcií týchto

vektorov na os telesa. K projekciám prispievajú však len vektory $\mathbf{r} \times \mathbf{f}$ a $\boldsymbol{\epsilon} \cdot \mathbf{T}$, lebo ostatné tri sú na os kolmé. Projekcia vektora $\mathbf{r} \times \mathbf{f}$ na os telesa je moment sily $\mathbf{f}$ vzhľadom na os telesa, vektor $\mathbf{D}_o$. Pretože uhlové zrýchlenie pri pevnej osi má smer osi, môžeme písať: $\boldsymbol{\epsilon} = \epsilon \rho$, teda $\boldsymbol{\epsilon} \cdot \mathbf{T} = \epsilon(\rho \cdot \mathbf{T})$ a pre projekciu tohto vektora na os telesa dostávame: $(\boldsymbol{\epsilon} \cdot \mathbf{T})_o = \epsilon(\rho \cdot \mathbf{T} \cdot \rho) \rho = (\rho \cdot \mathbf{T} \cdot \rho) \boldsymbol{\epsilon}$.

Z rovnice (1) sme dostali takto výsledok

$$\mathbf{D} = (\rho \cdot \mathbf{T} \cdot \rho) \boldsymbol{\epsilon} = J \boldsymbol{\epsilon} \quad (2)$$

kde sme index o v označení momentu sily účinkujúcej na teleso vzhľadom na os telesa už vynechali.

Skalárna veličina J v rovnici (2),

$$J = \rho \cdot \mathbf{T} \cdot \rho = (\mathbf{T} \cdot \rho) \cdot \rho \quad (3)$$

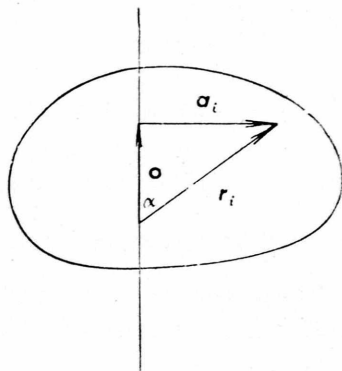
volá sa *moment zotrvačnosti*. Rovnica sama je *pohybová rovnica tuhého telesa uloženého na osi*, t. j.: *Keď tuhé teleso je upevnené tak, že sa môže otáčať len okolo osi v priestore nehybnej, súčet momentov všetkých síl pôsobiacich na teleso vzhľadom na os telesa sa rovná súčinu príslušného momentu zotrvačnosti telesa a uhlového zrýchlenia vznikajúceho pohybu*, lebo ak na teleso účinkuje súčasne nie jedna, ale niekoľko síl, symbol $\mathbf{D}$ označuje zrejme súčet momentov všetkých síl, ktoré na teleso účinkujú, vzhľadom na jeho os.

Ak na osi uložené teleso sa okolo tejto osi neotáča, je v rovnici (2) $\boldsymbol{\epsilon} = 0$. Podmienkou rovnováhy tuhého telesa uloženého na osi je teda, aby sa súčet momentov síl, ktoré na tuhé teleso pôsobia, vzhľadom na os telesa rovnal nule.

Práve tak ako v rovnici (2) moment $\mathbf{D}$ závisí len od uloženia osi v telese, na ktorú sa vzťahuje, aj moment zotrvačnosti J závisí len od polohy tejto osi, hoci v jeho vyjadrení pomocou vzorca (3) je tenzor $\mathbf{T}$, ktorý závisí aj od polohy bodu zvoleného na tejto osi. Podľa vzorcov (3) a (4.6.1) a obr. 4.11 je skutočne

$$\begin{aligned} J &= (\mathbf{T} \cdot \rho) \cdot \rho = [\sum m_i(r_i^2 J - \mathbf{r}_i \mathbf{r}_i) \cdot \rho] \cdot \rho = \sum m_i(r_i^2 - r_i^2 \cos^2 \alpha) = \\ &= \sum m_i r_i^2 \sin^2 \alpha = \sum m_i a^2 \end{aligned} \quad (4)$$

t. j. slovami: *moment zotrvačnosti tuhého telesa sa rovná súčtu súčinov vždy hmoty hmotného elementu telesa a druhej mocniny jeho kolmej vzdialenosti od priamky, na ktorú sa moment zotrvačnosti vzťahuje*.



Obr. 4.11

Pri telesách hmotou spojite vyplnených je zrejmé

$$J = \int a^2 dm = \int s a^2 d\tau \quad (5)$$

kde s označuje mernú hmotnosť a $d\tau$ objemový element. Momenty zotrvačnosti telesa vzhľadom na osi pravouhlého súradnicového systému sú teda

$$\begin{aligned} J_x &= \int (y^2 + z^2) s d\tau \\ J_y &= \int (z^2 + x^2) s d\tau \\ J_z &= \int (x^2 + y^2) s d\tau \end{aligned} \quad (6)$$

Keď je merná hmotnosť telesa konštantná, môžeme písať aj: $J_x = s \int (y^2 + z^2) dx dy dz$ a podobne vyjadriť aj J_y a J_z .

V praxi sú telesá dosť často uložené na osiach, ktoré prechádzajú ich ťažiskami. Ak chceme, aby teleso otáčajúce sa okolo takejto osi malo pri predpísanej hmotnosti čo najväčší moment zotrvačnosti, podľa vzorca (4) musí mať taký tvar, pri ktorom hmotnosť telesa alebo aspoň jej podstatná časť je podľa možnosti ďaleko od osi. Vzhľadom na túto okolnosť v dynamike tuhého telesa sa používa aj veličina, ktorá sa volá *polomer zotrvačnosti* alebo *gyračný polomer*. Je to vzdialenosť od osi otáčania, v ktorej keby bola sústredená celá hmotnosť telesa, moment zotrvačnosti by ostal bez zmeny. Polomer zotrvačnosti R je teda určený vzťahom $MR^2 = J$, takže $R = \sqrt{\frac{J}{M}}$.

Teleso s osovou súmernosťou, ktoré vzhľadom na túto svoju os má pomerne veľký moment zotrvačnosti, nazýva sa vo fyzike aj v technickej praxi *zotrvačníkom*.

Úloha 1. Treba vypočítať moment zotrvačnosti homogénnej plnej gule vzhľadom na jej priemer, ak polomer gule je R a hmotnosť M .

Riešenie: Stred gule zvolíme za začiatok pravouhlého súradnicového systému. Momenty zotrvačnosti gule vzhľadom na osi tohto systému sú potom dané vzorcami (6). V našom prípade všetky priemery gule sú však rovnocenné. Preto ak moment zotrvačnosti gule vzhľadom na jej priemer označíme jednoducho J , môžeme písať

$$J = \frac{1}{3} (J_x + J_y + J_z) = \frac{2}{3} \int (x^2 + y^2 + z^2) s d\tau = \frac{2}{3} \int r^2 s d\tau$$

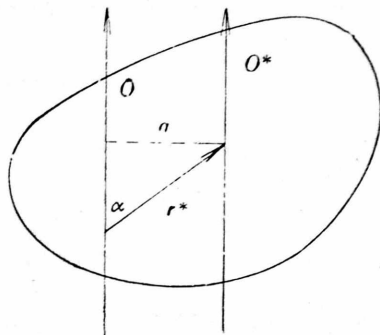
V poslednom výraze objemový element $d\tau$ môžeme zvoliť ako elementárny priestor medzi povrchmi dvoch guľ s polormi r a $r + dr$, takže bude $d\tau = 4\pi r^2 dr$. Hľadaný moment zotrvačnosti je teda

$$J = \frac{2}{3} \int_0^R r^2 s \cdot 4\pi r^2 dr = \frac{8\pi s}{3} \int_0^R r^4 dr = \frac{8\pi}{3} \cdot \frac{3M}{4\pi R^3} \cdot \frac{R^5}{5} = \frac{2}{5} MR^2$$

Pravda, momenty zotrvačnosti telies možno počítat aj podľa vzorca (3) $J = (\mathbf{T} \cdot \boldsymbol{\rho}) \cdot \boldsymbol{\rho}$, ale v tom prípade treba poznať tenzor hybnosti telesa aspoň v jednom bode priamky, vzhľadom na ktorú sa moment zotrvačnosti má vypočítat. V čl. 4.9 sa však poučíme, že tenzor hybnosti telesa v každom jeho bode možno vyjadriť pomocou troch tzv. *hlavných momentov zotrvačnosti telesa*.

Na tomto mieste spojením vzorcov (4.6.8) a (3) odvodíme ešte tzv. *Steinerovu vetu* v jej bežne používanom znení. Podľa týchto vzorcov pre moment zotrvačnosti tuhého telesa s celkovou hmotnosťou M vzhľadom na ľubovoľnú priamku, ak tenzor hybnosti telesa v niektorom bode priamky je $\mathbf{T}$ a v ťažisku telesa $\mathbf{T}^*$, dostávame (obr. 4.12)

$$\begin{aligned} J &= (\mathbf{T} \cdot \boldsymbol{\rho}) \cdot \boldsymbol{\rho} = [(M(r^{*2} \mathbf{I} - \mathbf{r}^* \mathbf{r}^*) + \\ &+ \mathbf{T}^*) \cdot \boldsymbol{\rho}] \cdot \boldsymbol{\rho} = M(r^{*2} - r^{*2} \cos^2 \alpha) + \\ &+ (\mathbf{T}^* \cdot \boldsymbol{\rho}) \cdot \boldsymbol{\rho} = Mr^{*2} \sin^2 \alpha + J^* = \\ &= J^* + Ma^2 \end{aligned} \quad (7)$$



Obr. 4.12

t. j. slovami: *Moment zotrvačnosti tuhého telesa vzhľadom na ľubovoľnú priamku sa rovná jeho momentu zotrvačnosti vzhľadom na priamku ťažiskom telesa idúcu a s danou rovnobežnú, zväčšenému o príspevok ťažiska s celou hmotnosťou v ňom sústredenou.*

Pomocou momentov zotrvačnosti možno vyjadriť aj kinetickú energiu telesa pri akomkoľvek jeho pohybe. Majme na mysli najprv teleso uložené na osi, okolo ktorej sa teleso otáča uhlovou rýchlosťou ω . Pretože kinetická energia telesa sa rovná súčtu kinetických energií jeho hmotných elementov, kinetická energia telesa okolo nehybnej osi sa otáčajúceho je:

$$K = \sum \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \frac{1}{2} \sum m_i \omega^2 a_i^2 = \frac{1}{2} \omega^2 \sum m_i a_i^2 = \frac{1}{2} J \omega^2 \quad (8)$$

Odvođený vzorec správne vyjadruje aj kinetickú energiu telesa v jednom bode upevneného, lebo aj v tomto prípade každý pohyb telesa je len otáčanie okolo okamžitej osi.

Ak je však teleso úplne voľné, jeho kinetická energia je vyjadrená zložitejším vzorcom. Ak rýchlosť ťažiska telesa je $\mathbf{v}^*$ a teleso sa súčasne otáča uhlovou rýchlosťou ω , rýchlosť ktoréhokoľvek jeho bodu je $\mathbf{v}_i = \mathbf{v}^* + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'_i$, kde $\mathbf{r}'_i$ je jeho polohový vektor vzhľadom na ťažisko. Preto

$$\begin{aligned} K &= \sum \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \frac{1}{2} \sum m_i (\mathbf{v}^* + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'_i) \cdot (\mathbf{v}^* + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'_i) = \\ &= \frac{1}{2} \sum m_i [v^{*2} + 2(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'_i) \cdot \mathbf{v}^* + (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'_i) \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'_i)] \end{aligned}$$

Prostredný člen v hranatej zátvorke dáva však nulu, lebo $\sum m_i (\omega \times r'_i) \cdot v^* = \sum (\omega \times m_i r'_i) \cdot v^* = \omega \times (\sum m_i r'_i) \cdot v^* = 0$, keďže $\sum m_i r'_i = 0$. Posledný člen môžeme upraviť takto: $(\omega \times r'_i) \cdot (\omega \times r'_i) = \omega \cdot [r'_i \times (\omega \times r'_i)] = \omega \cdot (r_i'^2 \omega_i - r'_i r'_i \cdot \omega) = \omega \cdot (r_i'^2 I - r'_i r'_i) \cdot \omega = \omega^2 \rho \cdot (r_i'^2 I - r'_i r'_i) \cdot \rho$, ak ρ je jednotkový vektor rovnobežný s vektorom ω . Príspevok tohto člena k hľadanému súčtu je $\omega^2 \rho \cdot \sum m_i (r_i'^2 I - r'_i r'_i) \cdot \rho = \omega^2 (\rho \cdot T^* \cdot \rho) = \omega^2 J^*$, kde J^* je moment zotrvačnosti telesa vzhľadom na jeho okamžitú os otáčania, prechádzajúcu jeho ťažiskom. Kinetická energia úplne voľne sa pohybujúceho tuhého telesa s celkovou hmotnosťou M je teda

$$K = \frac{1}{2} M v^{*2} + \frac{1}{2} J^* \omega^2 \quad (9)$$

t. j. rovná sa súčtu príspevku pohybu ťažiska telesa a otáčania okolo priamky idúcej ťažiskom.

Pohybovú rovnicu tuhého telesa uloženého na osi, $D = J\epsilon$, môžeme napísať aj v skalárnom tvare, lebo z rovnosti vektorov po obidvoch stranách tejto rovnice, ktoré sú rovnobežné s osou otáčania telesa, vyplýva aj rovnosť ich veľkostí vzťahujúcich sa na jednotkový vektor rovnobežný s osou telesa, inakšie však ľubovoľne orientovaný,

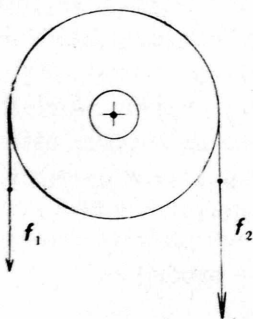
$$D = J\epsilon \quad (10)$$

Poznámka: Pri používaní rovnice (10), alebo ak ide o rovnováhu, rovnice $D = 0$, neslobodno však zabúdať na to, že ľavé strany týchto rovníc nie sú súčty absolútnych hodnôt, ale veľkostí momentov vonkajších síl pôsobiacich na tuhé teleso vzhľadom na os telesa, a veľkosť vektora môže byť kladná i záporná. Veľkosť momentu sily pôsobiacej na teleso vzhľadom na os telesa je kladná, ak tento moment je súhlasne rovnobežný s orientáciou osi telesa, a záporná v opačnom prípade. Pritom o orientácii osi rozhoduje voľba smeru jednotkového vektora ρ , ktorý je s osou telesa rovnobežný. Táto orientácia rozhoduje aj o znamienku veľkosti uhlového zrýchlenia ϵ , ktorá vystupuje v pravej strane rovnice (10). Ak sme os valca znázorneného na obr. 4.13 orientovali napríklad k sebe (vektor ρ smeruje pred papier), potom veľkosť momentu sily f_1 vzhľadom na os valca je kladná, avšak pri sile f_2 záporná.

Uhol pootočenia telesa okolo osi za nejaký čas t , ak tento uhol pokladáme za vektor, môžeme s použitím jednotkového vektora ρ napísať takto: $\varphi = \varphi \rho$. Potom $\epsilon = \frac{d^2 \varphi}{dt^2} =$

$$= \frac{d^2 \varphi}{dt^2} \rho = \epsilon \rho. \text{ Veľkosť uhlového zrýchlenia v rovnici (10)}$$

je teda druhá derivácia uhla pootočenia φ podľa času, počítaného kladne, ak pootočenie telesa nastalo v zmysle proti pohybu hodinových ručičiek pri pozorovaní telesa zo strany orientácie jeho osi.

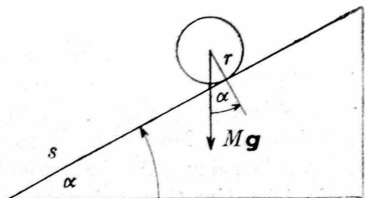


Obr. 4.13

Tieto pripomienky budú užitočné napríklad už pri riešení pohybu fyzikálneho kyvadla (čl. 60).

Úloha 2. Treba vypočítať čas, za ktorý prebehne voľne pustená guľa s polomerom r dĺžku naklonenej roviny s , ak uhol sklonu je α a guľa sa po naklonenej rovine valí.

Riešenie: Pri svojom pohybe sa guľa v každom okamihu otáča okolo svojej okamžitej osi otáčania, ktorá leží v naklonenej rovine. Podľa rovnice $D = J\varepsilon$ uhlové zrýchlenie tohto pohybu je $\varepsilon = D/J$. Podľa obr. 4.14 na guľu účinkuje jej tiaž Mg , ktorej moment vzhľadom na okamžitú os otáčania je $D = Mgr \sin \alpha$. Podľa výsledku úlohy 1. moment zotrvačnosti guľe vzhľadom na jej priemer je $J^* = \frac{2}{5} Mr^2$, podľa Steinerovej vety moment zotrvačnosti našej guľe vzhľadom na jej okamžitú os otáčania je teda $J = \frac{2}{5} Mr^2 + Mr^2 = \frac{7}{5} Mr^2$. Podľa týchto výsledkov



Obr. 4.14

$$\varepsilon = \frac{D}{J} = \frac{Mgr \sin \alpha}{J} = \frac{5Mgr \sin \alpha}{7Mr^2} = \frac{5g \sin \alpha}{7r}$$

a pre zrýchlenie stredu guľe vychádza

$$a = r\varepsilon = \frac{5g \sin \alpha}{7}$$

Pretože toto zrýchlenie je konštantné, stred guľe koná pohyb rovnomerne zrýchlený.

Teda $s = \frac{1}{2} at^2$, takže hľadaný čas je:

$$t = \sqrt{\frac{2s}{a}} = \sqrt{\frac{14s}{5g \sin \alpha}}$$

Úlohu môžeme riešiť aj pomocou zákona o zachovaní energie. Nech je U polohová energia guľe. Potom $dU + dK = 0$. Ak sa stred guľe pohybuje rýchlosťou v , za čas dt klesne ťažisko guľe o výšku $-dh = (v dt) \sin \alpha$. Preto $dU = Mg dh = -(Mgv dt) \sin \alpha$.

Zo vzorca $K = \frac{1}{2} J\omega^2$ dostávame: $dK = J\omega \varepsilon dt$. Podľa toho pri pohybe guľe v každom okamžiku je splnená rovnica $-(Mgv dt) \sin \alpha + J\omega \varepsilon dt = 0$, alebo $J\omega \varepsilon = Mgv \sin \alpha = Mgv \omega r \sin \alpha$, takže v súhlase s predchádzajúcim výpočtom $\varepsilon = \frac{Mgr \sin \alpha}{J} = \frac{5g \sin \alpha}{7r}$.

Rozriešime úlohu aj pomocou Lagrangeovej rovnice druhého druhu (3.8.10) $\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{\partial L}{\partial \varphi}$, kde φ je uhol pootočenia valca od začiatku pohybu. Dostávame:

$$L = K - U = \frac{1}{2} J_0 \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} Mr^2 \dot{\varphi}^2 - Mg(h - r\varphi \sin \alpha)$$

kde J_0 je moment zotrvačnosti guľe vzhľadom na jej priemer a h výška naklonenej roviny. Je teda:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = (J_0 + Mr^2) \dot{\varphi}, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = J \ddot{\varphi}, \quad \frac{\partial L}{\partial \varphi} = Mgr \sin \alpha$$

$$\text{z čoho } J \ddot{\varphi} = Mgr \sin \alpha \text{ alebo } \varepsilon = \ddot{\varphi} = \frac{Mgr \sin \alpha}{J}$$

Úloha 3. Na vodorovnej osi je uložený valec s polomerom r . Valec nesie zotrvačník, ktorého moment zotrvačnosti zväčšený o príspevok valca je J . Na valec je navinuté lano zatažené závažím tiaže Q . Za aký čas od uvoľnenia zariadenia klesne závažie o výšku h ?

Riešenie: Na valec so zotrvačníkom účinkuje za pohybu sila napnutého lana P a udeľuje valcu uhlové zrýchlenie ε podľa rovnice $Pr = J\varepsilon$. Na klesajúce závažie účinkuje jeho tiaž Q zmenšená o napätie lana, takže zrýchlenie klesajúceho závažia a spĺňa rovnicu

$$Q - P = \frac{Q}{g} a = \frac{Q}{g} r\varepsilon$$

Vylúčením sily P z týchto dvoch rovníc dostávame rovnicu

$$Q - \frac{J\varepsilon}{r} = \frac{Q}{g} r\varepsilon$$

takže $\varepsilon = \frac{Qrg}{Qr^2 + Jg}$, čiže $a = \varepsilon r = \frac{Qr^2g}{Qr^2 + Jg}$. Pretože zrýchlenie a je konštantné,

klesá závažie Q pohybom rovnomerne zrýchleným. Z rovnice $h = \frac{1}{2}at^2$ dostávame:

$$t = \sqrt{\frac{2h}{a}} = \sqrt{\frac{2h(Qr^2 + Jg)}{Qr^2g}}$$

Riešte úlohu aj použitím zákona o zachovaní energie.

4.8. Deviačný moment. Keď sa teleso otáča okolo osi v telese ľubovoľne uloženej, zotrvačnosť jeho hmotných elementov sa prejavuje odstredivými silami, zotrvačnosť elementu s hmotnosťou m_i silou $m_i\omega^2\mathbf{a}_i$, ak je $\mathbf{a}_i$ vektor kolmý na os otáčania (obr. 4.11). Súčet momentov všetkých odstredivých síl vzhľadom na bod osi O je:

$$\begin{aligned} \mathbf{D} &= \sum \mathbf{r}_i \times (m_i\omega^2\mathbf{a}_i) = \omega^2 \sum \mathbf{r}_i \times m_i(\mathbf{r}_i - \mathbf{o}_i) = \\ &= \omega^2 \sum -m_i\mathbf{r}_i \times \mathbf{o}_i = \omega^2 \sum m_i(\mathbf{o}_i \times \mathbf{r}_i) = \omega^2 \mathbf{U} \end{aligned} \quad (1)$$

keď sme súčet $\sum m_i(\mathbf{o}_i \times \mathbf{r}_i)$, tzv. *deviačný moment* telesa vzhľadom na zvolený bod danej osi jeho otáčania, označili $\mathbf{U}$,

$$\mathbf{U} = \sum m_i(\mathbf{o}_i \times \mathbf{r}_i) \quad (2)$$

pričom $\mathbf{o}_i$ je priemet polohového vektora $\mathbf{r}_i$ do osi otáčania. Pri telesách spojite vyplnených hmotou, ak s je merná hmotnosť, $\mathbf{U} = \int s(\mathbf{o} \times \mathbf{r}) d\tau$. Keď