$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = (J_0 + Mr^2)\,\dot{\varphi}, \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = J\ddot{\varphi}, \qquad \frac{\partial L}{\partial \varphi} = Mgr \sin\alpha$$

z čoho $J\ddot{\varphi} = Mgr \sin\alpha$ alebo $\varepsilon = \ddot{\varphi} = \dfrac{Mgr \sin\alpha}{J}$

Úloha 3. Na vodorovnej osi je uložený valec s polomerom r. Valec nesie zotrvačník, ktorého moment zotrvačnosti zväčšený o príspevok valca je J. Na valec je navinuté lano zaťažené závažím tiaže Q. Za aký čas od uvoľnenia zariadenia klesne závažie o výšku h?

Riešenie: Na valec so zotrvačníkom účinkuje za pohybu sila napnutého lana P a udeľuje valcu uhlové zrýchlenie ε podľa rovnice $Pr = J\varepsilon$. Na klesajúce závažie účinkuje jeho tiaž Q zmenšená o napätie lana, takže zrýchlenie klesajúceho závažia a spĺňa rovnicu

$$Q - P = \frac{Q}{g}\,a = \frac{Q}{g}\,r\varepsilon$$

Vylúčením sily P z týchto dvoch rovníc dostávame rovnicu

$$Q - \frac{J\varepsilon}{r} = \frac{Q}{g}\,r\varepsilon$$

takže $\varepsilon = \dfrac{Qrg}{Qr^2 + Jg}$, čiže $a = \varepsilon r = \dfrac{Qr^2g}{Qr^2 + Jg}$. Pretože zrýchlenie a je konštantné, klesá závažie Q pohybom rovnomerne zrýchleným. Z rovnice $h = \dfrac{1}{2}at^2$ dostávame:

$$t = \sqrt{\frac{2h}{a}} = \sqrt{\frac{2h(Qr^2 + Jg)}{Qr^2g}}$$

Riešte úlohu aj použitím zákona o zachovaní energie.

4.8. Deviačný moment. Keď sa teleso otáča okolo osi v telese ľubovoľne uloženej, zotrvačnosť jeho hmotných elementov sa prejavuje odstredivými silami, zotrvačnosť elementu s hmotnosťou m_i silou $m_i\omega^2\boldsymbol{a}_i$, ak je $\boldsymbol{a}_i$ vektor kolmý na os otáčania *(obr. 4.11)*. Súčet momentov všetkých odstredivých síl vzhľadom na bod osi O je:

$$\boldsymbol{D} = \sum \boldsymbol{r}_i \times (m_i\omega^2\boldsymbol{a}_i) = \omega^2 \sum \boldsymbol{r}_i \times m_i(\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{o}_i) =$$
$$= \omega^2 \sum - m_i\boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{o}_i = \omega^2 \sum m_i(\boldsymbol{o}_i \times \boldsymbol{r}_i) = \omega^2 \boldsymbol{U} \tag{1}$$

keď sme súčet $\Sigma m_i(\boldsymbol{o}_i \times \boldsymbol{r}_i)$, tzv. *deviačný moment* telesa vzhľadom na zvolený bod danej osi jeho otáčania, označili $\boldsymbol{U}$,

$$\boldsymbol{U} = \Sigma\, m_i(\boldsymbol{o}_i \times \boldsymbol{r}_i) \tag{2}$$

pričom $\boldsymbol{o}_i$ je priemet polohového vektora $\boldsymbol{r}_i$ do osi otáčania. Pri telesách spojite vyplnených hmotou, ak s je merná hmotnosť, $\boldsymbol{U} = \int s(\boldsymbol{o} \times \boldsymbol{r})\, \mathrm{d}\tau$. Keď za os otáčania zvolíme súradnicovú os X, deviačný moment vzhľadom na začiatok súradnicovej sústavy bude

$$\mathbf{U}_x = \sum m_i(\mathbf{o}_i \times \mathbf{r}_i) = \sum m_i x_i \mathbf{i} \times (x_i \mathbf{i} + y_i \mathbf{j} + z_i \mathbf{k}) =$$
$$= \sum m_i(x_i y_i \mathbf{k} - x_i z_i \mathbf{j}) = U_{xy}\mathbf{k} - U_{xz}\mathbf{j} \tag{3a}$$

pričom $U_{xy} = \Sigma m_i x_i y_i$ a $U_{xz} = \Sigma m_i x_i z_i$.

Ak osou otáčania je os Y, deviačný moment vzhľadom na začiatok sústavy súradníc je:

$$\mathbf{U}_y = \sum m(yz\mathbf{i} - yx\mathbf{k}) = U_{yz}\mathbf{i} - U_{yx}\mathbf{k} \tag{3b}$$

a podobne

$$\mathbf{U}_z = \sum m(zx\mathbf{j} - zy\mathbf{i}) = U_{zx}\mathbf{j} - U_{zy}\mathbf{i} \tag{3c}$$

Veličiny $U_{xy} = U_{yz}$, $U_{xz} = U_{zx}$ a $U_{yz} = U_{zy}$ sa v starších knihách volajú tiež deviačnými momentami, čo vedie často k nedorozumeniam. Pri telesách spojite vyplnených hmotou počítajú sa tieto veličiny práve tak, ako momenty zotrvačnosti, integráciou cez objem telesa, napríklad

$$U_{xy} = \int xy \, \mathrm{d}m = \int sxy \, \mathrm{d}\tau = \int s(xy) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z$$

a pod.

Aj priamym výpočtom možno ľahko dokázať, že keď os otáčania tuhého telesa prechádza jeho ťažiskom (a len v tom prípade), deviačný moment telesa vzhľadom na všetky body jeho danej osi je rovnaký. Vyplýva to však aj z tejto fyzikálnej úvahy:

Keď os otáčania prechádza ťažiskom, súčet všetkých odstredivých síl sa rovná nule, $\Sigma m_i \omega^2 \mathbf{a}_i = 0$, pretože súčet $\Sigma m_i \mathbf{a}_i$ sa rovná projekcii do roviny kolmej na os otáčania súčtu $\Sigma m_i \mathbf{r}_i = 0$, v ktorom polohové vektory môžu mať svoj spoločný začiatok v ťažisku telesa. Z toho však vyplýva, že celkový moment odstredivých síl $\mathbf{D} = \omega^2 \mathbf{U}$, je v tom prípade vzhľadom na všetky body osi rovnaký a je určený napr. celkovým momentom vzhľadom na ťažisko, $\mathbf{D}^* = \omega^2 \mathbf{U}^*$, pričom $\mathbf{U}^* = \Sigma m_i(\mathbf{o}_i' \times \mathbf{r}_i')$, a rovnaké sú preto aj príslušné deviačné momenty.

Keď sa teleso otáča okolo osi idúcej jeho ťažiskom, odstredivé sily sa nahradzujú jedinou dvojicou síl s momentom, ktorý sa rovná súčinu druhej mocniny uhlovej rýchlosti a deviačného momentu telesa vzhľadom na ktorýkoľvek bod jeho osi.

Aj deviačné momenty môžeme počítať pomocou tenzoru hybnosti telesa, a to v tom bode osi, pre ktorý deviačný moment počítame. Podľa *obr. 4.11* dostávame skutočne

$$(\mathbf{T} \cdot \boldsymbol{\rho}) \times \boldsymbol{\rho} = [\sum m_i(r_i^2 \mathbf{I} - \mathbf{r}_i \mathbf{r}_i) \cdot \boldsymbol{\rho}] \times \boldsymbol{\rho} = \sum m_i(r_i^2 \boldsymbol{\rho} - o_i \mathbf{r}_i) \times \boldsymbol{\rho} = \sum m_i(\mathbf{o}_i \times \mathbf{r}_i)$$

čiže

$$\mathbf{U} = (\mathbf{T} \cdot \boldsymbol{\rho}) \times \boldsymbol{\rho} \tag{4}$$

Deviačný moment telesa vzhľadom na bod osi otáčania dostaneme, keď jeho tenzor hybnosti v tomto bode znásobíme najprv skalárne, potom vektorove jednotkovým vektorom v smere osi otáčania.

4.9. Vyjadrenie tenzora hybnosti pomocou hlavných momentov zotrvačnosti. Voľné osi. Tenzor hybnosti tuhého telesa v bode, ktorý bol zvolený za začiatok pravouhlej súradnicovej sústavy, môžeme rozpísať takto

$$\mathbf{T} = \sum m(r^2\mathbf{I} - \mathbf{rr}) = \sum m \begin{bmatrix} (r^2 - x^2)\,\mathbf{ii} & -xy\mathbf{ij} & -xz\mathbf{ik} \\ -yx\mathbf{ji} & +(r^2 - y^2)\,\mathbf{jj} & -yz\mathbf{jk} \\ -zx\mathbf{ki} & -zy\mathbf{kj} & +(r^2 - z^2)\,\mathbf{kk} \end{bmatrix} =$$

$$= \sum m \begin{bmatrix} (y^2 + z^2)\,\mathbf{ii} & -xy\mathbf{ij} & -xz\mathbf{ik} \\ -yx\mathbf{ji} & +(z^2 + x^2)\,\mathbf{jj} & -yz\mathbf{jk} \\ -zx\mathbf{ki} & -zy\mathbf{kj} & +(x^2 + y^2)\,\mathbf{kk} \end{bmatrix} =$$

$$\begin{aligned} &+J_x\mathbf{ii} - U_{xy}\mathbf{ij} - U_{xz}\mathbf{ik} - \\ = &-U_{yx}\mathbf{ji} + J_y\mathbf{jj} - U_{yz}\mathbf{jk} - \\ &-U_{zx}\mathbf{ki} - U_{zy}\mathbf{kj} + J_z\mathbf{kk} \end{aligned} \tag{1}$$

Jeho hlavné zložky sú teda momenty zotrvačnosti telesa vzhľadom na súradnicové osi. Pomocou jeho vedľajších zložiek môžno vyjadriť deviačné momenty vzťahujúce sa na súradnicové osi ako osi otáčania a na ich začiatok ako vzťažný bod.

Ľubovoľne zvoleným bodom telesa (alebo jeho okolia) veďme všetky možné priamky a na každú z nich nanesme na obidve strany od tohto bodu dĺžku S, úmernú recipročnej hodnote druhej odmocniny momentu zotrvačnosti telesa vzhľadom na túto priamku, teda

$$S = \frac{A}{\sqrt{J}}$$

kde A je ľubovoľná konštanta. Definovali sme týmto spôsobom plochu, ktorej rovnicu z tohto vzorca ľahko odvodíme. Môžeme ho písať aj takto:

$$S^2 J = A^2$$

alebo, keď píšeme $S^2 = X^2 + Y^2 + Z^2$, pričom X, Y a Z sú súradnice bodu plochy, takto

$$(X^2 + Y^2 + Z^2)(\mathbf{T} \cdot \boldsymbol{\rho}) \cdot \boldsymbol{\rho} = A^2$$

Ale $\boldsymbol{\rho} = \dfrac{X\mathbf{i} + Y\mathbf{j} + Z\mathbf{k}}{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}}$, čiže predchádzajúca rovnica je aj

$$[\mathbf{T} \cdot (X\mathbf{i} + Y\mathbf{j} + Z\mathbf{k})] \cdot (X\mathbf{i} + Y\mathbf{j} + Z\mathbf{k}) = A^2$$