Deviačný moment telesa vzhľadom na bod osi otáčania dostaneme, keď jeho tenzor hybnosti v tomto bode znásobíme najprv skalárne, potom vektorove jednotkovým vektorom v smere osi otáčania.

4.9. Vyjadrenie tenzora hybnosti pomocou hlavných momentov zotrvačnosti. Voľné osi. Tenzor hybnosti tuhého telesa v bode, ktorý bol zvolený za začiatok pravouhlej súradnicovej sústavy, môžeme rozpísať takto

$$\mathbf{T} = \sum m(r^2\mathbf{I} - \mathbf{rr}) = \sum m \begin{bmatrix} (r^2 - x^2)\,\mathbf{ii} & -xy\mathbf{ij} & -xz\mathbf{ik} \\ -yx\mathbf{ji} & +(r^2 - y^2)\,\mathbf{jj} & -yz\mathbf{jk} \\ -zx\mathbf{ki} & -zy\mathbf{kj} & +(r^2 - z^2)\,\mathbf{kk} \end{bmatrix} =$$

$$= \sum m \begin{bmatrix} (y^2 + z^2)\,\mathbf{ii} & -xy\mathbf{ij} & -xz\mathbf{ik} \\ -yx\mathbf{ji} & +(z^2 + x^2)\,\mathbf{jj} & -yz\mathbf{jk} \\ -zx\mathbf{ki} & -zy\mathbf{kj} & +(x^2 + y^2)\,\mathbf{kk} \end{bmatrix} =$$

$$\begin{aligned} &+J_x\mathbf{ii} - U_{xy}\mathbf{ij} - U_{xz}\mathbf{ik} - \\ = &-U_{yx}\mathbf{ji} + J_y\mathbf{jj} - U_{yz}\mathbf{jk} - \\ &-U_{zx}\mathbf{ki} - U_{zy}\mathbf{kj} + J_z\mathbf{kk} \end{aligned} \tag{1}$$

Jeho hlavné zložky sú teda momenty zotrvačnosti telesa vzhľadom na súradnicové osi. Pomocou jeho vedľajších zložiek možno vyjadriť deviačné momenty vzťahujúce sa na súradnicové osi ako osi otáčania a na ich začiatok ako vzťažný bod.

Ľubovoľne zvoleným bodom telesa (alebo jeho okolia) veďme všetky možné priamky a na každú z nich nanesme na obidve strany od tohto bodu dĺžku S, úmernú recipročnej hodnote druhej odmocniny momentu zotrvačnosti telesa vzhľadom na túto priamku, teda

$$S = \frac{A}{\sqrt{J}}$$

kde A je ľubovoľná konštanta. Definovali sme týmto spôsobom plochu, ktorej rovnicu z tohto vzorca ľahko odvodíme. Môžeme ho písať aj takto:

$$S^2 J = A^2$$

alebo, keď píšeme $S^2 = X^2 + Y^2 + Z^2$, pričom X, Y a Z sú súradnice bodu plochy, takto

$$(X^2 + Y^2 + Z^2)(\mathbf{T} \cdot \boldsymbol{\rho}) \cdot \boldsymbol{\rho} = A^2$$

Ale $\boldsymbol{\rho} = \dfrac{X\mathbf{i} + Y\mathbf{j} + Z\mathbf{k}}{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}}$, čiže predchádzajúca rovnica je aj

$$[\mathbf{T} \cdot (X\mathbf{i} + Y\mathbf{j} + Z\mathbf{k})] \cdot (X\mathbf{i} + Y\mathbf{j} + Z\mathbf{k}) = A^2$$

Keď použijeme vzorec (1) a vykonáme naznačené násobenia, dostávame ďalej

$$\begin{gathered} J_x X^2 - U_{xy} XY - U_{zx} XZ - \\ -U_{yx} YX + J_y Y^2 - U_{yz} YZ - \\ -U_{zx} ZX - U_{zy} ZY + J_z Z^2 = A^2 \end{gathered}$$

čiže

$$J_x X^2 + J_y Y^2 + J_z Z^2 - 2U_{xy} XY - 2U_{xz} XZ - 2U_{yz} YZ = A^2$$

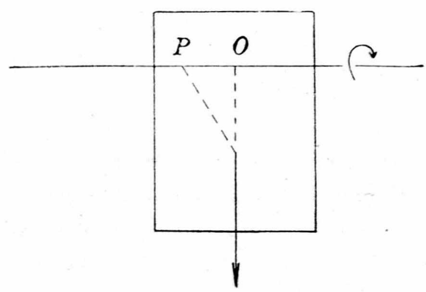
lebo $U_{yx} = U_{xy}$ a pod.

Odvodená rovnica je rovnica plochy druhého stupňa a pri skutočných telesách podľa svojho významu je celá v konečne. Je to teda elipsoid a volá sa *elipsoid zotrvačnosti.*

Vzhľadom na svoje osi ako súradnicové osi má však elipsoid zotrvačnosti rovnicu

$$J_1 X^2 + J_2 Y^2 + J_3 Z^2 = A^2 \tag{2}$$

v ktorej koeficienty označujú momenty zotrvačnosti telesa vzhľadom na tieto osi. Vedľajšie zložky tenzoru hybnosti vzhľadom na tieto osi rovnajú sa teda nule. Preto podľa vzorcov (4.8.3) vzhľadom na osi elipsoidu zotrvačnosti, ak okrem toho vzťažným bodom pre počítanie momentov je stred elipsoidu, aj deviačné momenty sa rovnajú nule; vo všeobecnosti nerovnajú sa však nule, ak vzťažným bodom nie je stred elipsoidu. Keď sa tuhé teleso otáča okolo osi, celkový moment odstredivých síl vzhľadom na bod osi otáčania je však násobkom príslušného deviačného momentu druhou mocninou uhlovej rýchlosti ω, $\mathbf{D} = \omega^2 \mathbf{U}$. Preto všetko, čo sme práve povedali o deviačných momentoch, platí rovnako aj pre momenty odstredivých síl. To znázorňuje *obr. 4.15*. Keď sa hmotnostný obdĺžnik otáča okolo osi, ktorá je so stranou obdĺžnika rovnobežná, moment odstredivých síl sa rovná nule vzhľadom na bod O, lebo jedna z osí elipsoidu zotrvačnosti obdĺžnika v tomto bode je rovnobežná s osou otáčania, nerovná sa však nule vzhľadom na bod P.



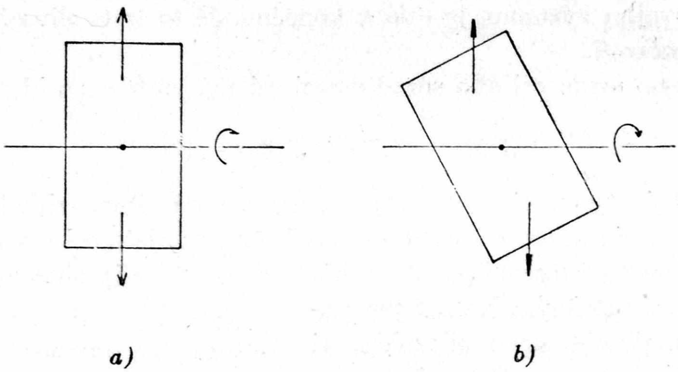
Obr. 4.15

Keď sa však teleso otáča okolo osi, ktorá prechádza cez ťažisko telesa, súčet odstredivých síl sa rovná nule. Ak okrem toho os otáčania splýva aj s niektorou osou elipsoidu zotrvačnosti telesa v jeho ťažisku, podľa predošlej úvahy aj súčet momentov odstredivých síl vzhľadom na ťažisko sa rovná nule, a preto nule sa rovná tento moment vôbec:

Keď sa tuhé teleso otáča okolo niektorej osi elipsoidu zotrvačnosti telesa v jeho ťažisku, odstredivé sily sú vo vzájomnej rovnováhe.

Osi elipsoidu zotrvačnosti telesa v jeho ťažisku sa preto nazývajú *voľnými osami* telesa. Keď sa tuhé teleso otáča okolo niektorej zo svojich voľných osí, odstredivé sily sa nijako neprejavujú *(obr. 4.16a)*.

Keď však os otáčania sa tuhého telesa prechádza síce cez ťažisko telesa, avšak nesplýva ani s jednou z osí elipsoidu zotrvačnosti telesa v jeho ťažisku, odstredivé sily nie sú v rovnováhe, ale sa prejavujú ako dvojica síl *(obr. 4.16b)*,



Obr. 4.16

ktorá sa snaží os telesa z jej okamžitej polohy vychýliť. Ak teleso je uložené na mechanickej osi, ktorá je vedená ložiskami, vznikajú tým v ložiskách tzv. *axiálne tlaky*, sily, ktoré aj pri malej rýchlosti otáčania sa telesa sú pomerne veľké, sú na os rotujúceho telesa kolmé a menia stále svoj smer. Nimi sú ložiská silne namáhané a dochádza k ich rýchlemu opotrebovaniu. O telese, ktoré je uložené na osi prechádzajúcej cez ťažisko telesa, hovoríme, že je *staticky vyvážené*; ak okrem toho mechanická os telesa je súčasne aj jeho voľnou osou, hovoríme, že teleso je aj *dynamicky vyvážené*.

Vzhľadom na rovnicu (2) zo vzorca (1) vyplýva, že tenzor hybnosti telesa, vzťahujúci sa na ktorýkoľvek bod telesa, možno písať aj v tvare jednoduchého trojčlena,

$$\boldsymbol{T} = J_1 \boldsymbol{ii} + J_2 \boldsymbol{jj} + J_3 \boldsymbol{kk} \tag{3}$$

kde J_1, J_2 a J_3 sú momenty zotrvačnosti telesa, vzťahujúce sa na osi jeho elipsoidu zotrvačnosti v príslušnom bode. Tenzor hybnosti v ťažisku telesa je teda

$$\boldsymbol{T}^* = J_1^* \boldsymbol{ii} + J_2^* \boldsymbol{jj} + J_3^* \boldsymbol{kk} \tag{4}$$

Keď sú známe smery osí elipsoidu zotrvačnosti v ťažisku telesa a momenty zotrvačnosti vzhľadom na ne, tzv. hlavné momenty zotrvačnosti J_1^*, J_2^*, J_3^*, sú tým už určené momenty zotrvačnosti i deviačné momenty vzhľadom na všetky osi idúce ťažiskom telesa a vzhľadom na vzorec (4.6.8) i vzhľadom na ostatné osi.

Nech je tenzor hybnosti telesa v jeho ťažisku $\boldsymbol{T}^* = J_1^* \boldsymbol{ii} + J_2^* \boldsymbol{jj} + J_3^* \boldsymbol{kk}$, kde $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ sú jednotkové vektory v smere osí elipsoidu zotrvačnosti. Podľa vzorca (4.7.3) moment zotrvačnosti telesa vzhľadom na os idúcu ťažiskom, s jednotkovým vektorom $\boldsymbol{\rho}$, zvierajúcim s osami elipsoidu uhly α, β a γ, je potom

$$J^* = (\boldsymbol{T}^* \cdot \boldsymbol{\rho}) \cdot \boldsymbol{\rho} = J_1^* \cos^2 \alpha + J_2^* \cos^2 \beta + J_3^* \cos^2 \gamma \tag{5}$$

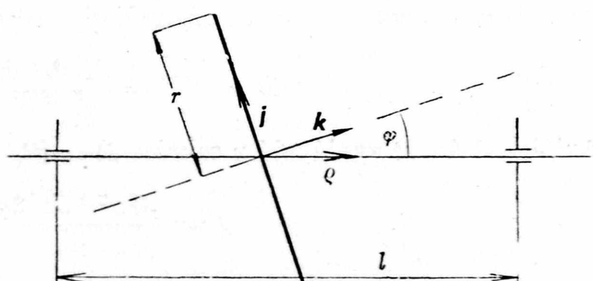
Deviačný moment podľa vzorca (4.8.4) dostávame v tvare

$$\boldsymbol{U}^* = (\boldsymbol{T}^* \cdot \boldsymbol{\rho}) \times \boldsymbol{\rho} = [(J_1^* \boldsymbol{ii} + J_2^* \boldsymbol{jj} + J_3^* \boldsymbol{kk}) \cdot \boldsymbol{\rho}] \times \boldsymbol{\rho} =$$

$$= [(J_1^* \cos \alpha)\, \boldsymbol{i} + (J_2^* \cos \beta)\, \boldsymbol{j} + (J_3^* \cos \gamma)\, \boldsymbol{k}] \times (\cos \alpha \boldsymbol{i} + \cos \beta \boldsymbol{j} + \cos \gamma \boldsymbol{k}) =$$

$$= \begin{vmatrix} \boldsymbol{i}, & \boldsymbol{j}, & \boldsymbol{k} \\ J_1^* \cos \alpha, & J_2^* \cos \beta, & J_3^* \cos \gamma \\ \cos \alpha, & \cos \beta, & \cos \gamma \end{vmatrix} \tag{6}$$

Príklad 1. Kruhová doska s hmotnosťou M, polomerom r a so zanedbateľnou hrúbkou *(obr. 4.17)* nech sa otáča okolo osi, ktorá prechádza stredom dosky, avšak s jej geometrickou osou zviera uhol φ, uhlovou rýchlosťou ω. Mechanická os dosky nech je uložená v ložiskách, ktorých vzájomná vzdialenosť nech je l. Vypočítame deviačný moment dosky vzhľadom na jej mechanickú os, moment odstredivých síl a tlaky na ložiská (axiálne tlaky), ktoré vznikajú ich pôsobením.



Obr. 4.17

Elipsoid zotrvačnosti kruhovej dosky je zrejme rotačný a jeho os je na rovinu dosky kolmá. Zvolíme ju za súradnicovú os Z. Ostávajúce osi X a Y budú potom v rovine dosky.

Momenty zotrvačnosti J_1^*, J_2^* a J_3^* sú:

$$J_1^* = \int y^2 \,\mathrm{d}m, \qquad J_2^* = \int x^2 \,\mathrm{d}m$$

Ich súčet je teda

$$J_1^* + J_2^* = 2J_1^* = 2J_2^* = \int (x^2 + y^2)\,\mathrm{d}m = J_3^*$$

čiže

$$J_1^* = J_2^* = \frac{1}{2} J_3^* = \frac{1}{2} \int (x^2 + y^2)\,\mathrm{d}m = \frac{1}{2} \int a^2\,\mathrm{d}m$$

V našom prípade plošná hustota hmotnosti je $\frac{M}{\pi r^2}$, takže môžeme písať: $\mathrm{d}m = \frac{M}{\pi r^2}\,2\pi a\,\mathrm{d}a$ a teda

$$J_1^* = J_2^* = \frac{1}{2} J_3^* = \frac{M}{2\pi r^2} \int a^2 \,.\, 2\pi a \,.\, \mathrm{d}a = \frac{1}{4} M r^2$$

Podľa *obr. 4.17* je $\alpha = \frac{1}{2}\pi$, $\beta = \varphi + \frac{1}{2}\pi$, $\gamma = \varphi$, teda

$$\cos\alpha = 0, \qquad \cos\beta = -\sin\varphi, \qquad \cos\gamma = \cos\varphi$$

Podľa odvodeného vzorca pre deviačný moment v našom prípade vychádza

$$\boldsymbol{U} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i}, & \boldsymbol{j}, & \boldsymbol{k} \\ 0, & -J_2^* \sin\varphi, & J_3^* \cos\varphi \\ 0, & -\sin\varphi, & \cos\varphi \end{vmatrix} = \boldsymbol{i}(J_3^* \cos\varphi \sin\varphi - J_2^* \sin\varphi \cos\varphi) =$$

$$= \boldsymbol{i} J_1^* \sin\varphi\cos\varphi = \boldsymbol{i}\,\frac{Mr^2}{4} \sin\varphi\cos\varphi = \frac{Mr^2 \sin 2\varphi}{8}\,\boldsymbol{i}$$

Absolútna hodnota momentu odstredivých síl je teda

$$D = \omega^2 U = \frac{M\omega^2 r^2 \sin 2\varphi}{8}$$

Axiálne tlaky P vyplývajú z rovnice $D = Pl$,

$$P = \frac{M\omega^2 r^2 \sin 2\varphi}{8l}$$

4.10. Kyvadlo. Teleso upevnené tak, že sa môže otáčať okolo vodorovnej osi, ktorá neprechádza jeho ťažiskom, volá sa fyzikálne kyvadlo. Keď vzdialenosť jeho ťažiska od osi je a a teleso má hmotnosť M, pri výchylke z rovnovážnej polohy účinkuje na teleso jeho tiaž Mg, ktorá vzhľadom na os kyvadla má moment veľkosti — $Mga \sin\varphi$. Podľa rovnice (4.7.10) na str. 162 pre pohyb fyzikálneho kyvadla *(obr. 4.18)* platí teda diferenciálna rovnica

$$J\,\frac{d^2\varphi}{\mathrm{d}t^2} = -Mga\sin\varphi$$