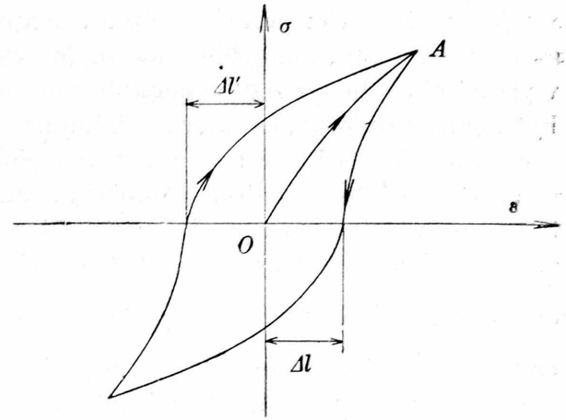
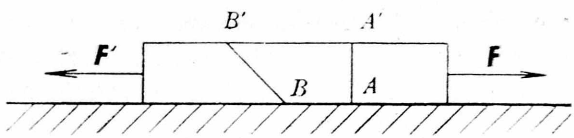
v ťahu a v tlaku až nad medzu pružnosti získame diagram znázornený zveličene na *obr. 5.4.* Úsek OA *(panenská krivka)* zodpovedá prvému namáhaniu v ťahu. Keď tento ťah zrušíme, tyč sa skráti pozdĺž inej krivky a pri nulovom napätí má tyč trvalú deformáciu ťahom Δl, ktorá sa odstráni až dostatočne veľkým tlakom. Ďalšie zväčšovanie tlaku (napätie za tlaku berieme so záporným znamienkom) má za následok zápornú deformáciu a po zmenšení tlaku na nulu ostáva trvalá deformácia tlakom $\Delta l'$ atď. Uzavretá krivka znázorňujúca závislosť napätia od deformácie sa volá *hysterézna slučka.*



Obr. 5.4

Jej plocha vyjadruje prácu prepočítanú na jednotkový prierez deformácií podrobovaného nedokonale pružného telesa a má za následok jeho ohrievanie.

V nasledujúcich článkoch budeme sa zaoberať najprv len správaním sa pružných telies, za účinku síl nepresahujúcich medze pružnosti a dosť malých, aby aj Hookov zákon bol stále splnený.

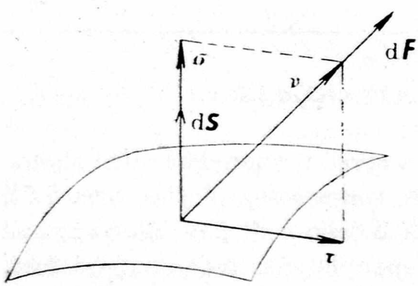


Obr. 5.5

5.2. Tenzor napätia a deformácie. Majme na mysli rovnorodý hranol zhotovený z pružného materiálu, spočívajúci na vodorovnej ploche *(obr. 5.5)*, a neprihliadajme k jeho tiaži a teda ani k reakcii jeho podložky. Ak na hranol neúčinkuje nijaká sila, hranol je v pokoji. Nepohybuje sa teda ani jeho časť, ktorá je napríklad vpravo od mysleného rezu AA' (alebo BB'). To však — keďže na hranol ako celok neúčinkuje nijaká vonkajšia sila — znamená, že ani materiál hranola, ktorý je vľavo od rezu AA', neúčinkuje nijakou silou na materiál, ktorý je vpravo od tohto rezu, lebo inakšie by nastal pohyb tejto časti. V reze AA' niet teda za týchto okolností nijakého silového pôsobenia. Keď však hranol podrobíme pôsobeniu vonkajších síl $\mathbf{F}$ a $\mathbf{F}'$, ktoré ho napríklad len napínajú, no nevyvolávajú nijaký pohyb hranola, časť hranola, ktorá je vpravo (a pochopiteľne aj vľavo) od rezu AA', bude zase v pokoji. Na túto časť účinkuje však teraz vonkajšia sila $\mathbf{F}$. Pretože pohyb opäť nevzniká, musíme usudzovať, že teraz časť hranola, ktorá je vľavo od rezu AA', účinkuje cez tento rez na časť, ktorá je vpravo od tohto rezu (a naopak), silou, ktorá ruší účinok sily $\mathbf{F}$ ($\mathbf{F}'$). Tento silový účinok je možný v dôsledku deformácie hranola, pri ktorej sa zmenili vzájomné vzdialenosti atómov a molekúl, z ktorých je materiál hranola vytvorený.

Z opísaného myšlienkového pokusu vyplýva toto: Ak na pružné pevné teleso účinkujú vonkajšie sily, teleso je deformované a na ľubovoľnú a ľubovoľne v telese uloženú elementárnu plôšku účinkujú z obidvoch jej strán sily, ktoré sa zhodujú v abs. hodnotách, ale majú opačné smery, ktoré však — keďže v predošlej úvahe rez AA' nemusel byť nutne na os hranola kolmý — nemusia byť kolmé na plôšku, na ktorú účinkujú.

Silu, ktorá pôsobí na zvolenú stranu plošnej jednotky ľubovoľne v telese uloženej, nazývame vektorom napätia alebo stručne tiež len *napätím*. Podľa toho, keď na elementárnu plôšku $\mathrm{d}S$, ktorej sme priradili plošný vektor $\mathrm{d}\mathbf{S}$, zo strany jeho orientácie pôsobí v telese sila $\mathrm{d}\mathbf{F}$ *(obr. 5.6)*, napätie vzhľadom aj na orientáciu elementárnej plôšky $\mathrm{d}\mathbf{S}$ je v tomto mieste $\boldsymbol{\nu} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{F}}{\mathrm{d}S}$. Teda na to, aby napätie v deformovanom pružnom telese bolo jednoznačne určené, nestačí zvoliť v telese len bod. Treba ešte zvoliť aj smer, určený napríklad jednotkovým vektorom $\mathbf{n}$, na ktorý má byť elementárna plôška kolmá a súhlasne s vektorom $\mathbf{n}$ orientovaná. Napätie rozkladáme na zložku normálovú $\boldsymbol{\sigma}$, rovnobežnú s normálou plôšky, na ktorú sa rozkladané napätie vzťahuje, a na zložku tangenciálnu $\boldsymbol{\tau}$. Ak normálové napätie $\boldsymbol{\sigma} = \sigma\mathbf{n}$ smeruje na stranu príčiny sily $\mathrm{d}\mathbf{F}$, čiže ak je to vektor s vektorom $\mathrm{d}\mathbf{S}$ súhlasne rovnobežný, veľkosť normálového napätia σ je kladná a hovoríme, že v telese je *ťah*. V opačnom prípade je $\sigma < 0$ a hovoríme, že v telese je *tlak*.



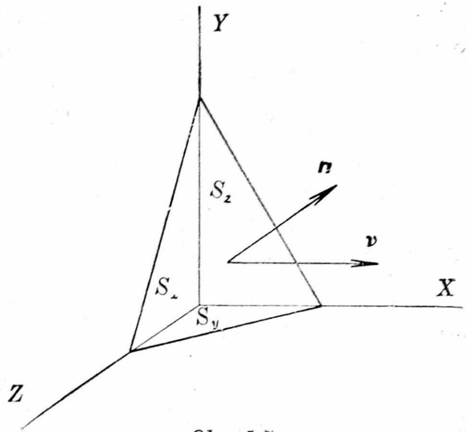
Obr. 5.6

Stav napätosti v určitom bode deformovaného pružného telesa poznáme, ak vieme udať sily pôsobiace na plošné jednotky ľubovoľne cez tento bod preložené a ľubovoľne orientované. Ukážeme, že na to stačí poznať napätia pôsobiace na tri plôšky, ktorých normály nie sú rovnobežné s tou istou rovinou, napríklad napätia pôsobiace na plošné jednotky ležiace v súradnicových rovinách ľubovoľne zvoleného pravouhlého súradnicového systému.

Za tým účelom bod O deformovaného pružného telesa, v ktorom nás stav jeho napätosti zaujíma, urobme začiatkom pravouhlého súradnicového systému osí XYZ a napätia v rovinách YZ, ZX a XY vzhľadom na orientáciu tretej osi označme $\boldsymbol{\nu}_x$, $\boldsymbol{\nu}_y$ a $\boldsymbol{\nu}_z$. Napätie napríklad $\boldsymbol{\nu}_x$ rovná sa teda číselne sile, ktorou materiál nachádzajúci sa na strane orientácie osi X účinkuje cez plošnú jednotku v rovine YZ na materiál nachádzajúci sa na opačnej strane tejto roviny.

Po zavedení týchto označení vo vnútri deformovaného pružného telesa majme na mysli elementárny štvorsten znázornený na *obr. 5.7.* Jeho steny ležiace v súradnicových rovinách nech majú plošné obsahy S_x, S_y, S_z, a štvrtá stena plošný obsah S. Jednotkový vektor kolmý na plochu S a orientovaný na vonkajšiu stranu štvorstena nech je $\boldsymbol{n}$ a napätie vzťahujúce sa na túto plochu pri tejto jej orientácii nech je $\boldsymbol{\nu}$. Ak hmota štvorstena je m, podľa prvej pohybovej rovnice tuhého telesa je potom

$$-(S_x\boldsymbol{\nu}_x + S_y\boldsymbol{\nu}_y + S_z\boldsymbol{\nu}_z) + \\ + S\boldsymbol{\nu} + m\boldsymbol{g} = m\boldsymbol{a}$$



Obr. 5.7

kde $\boldsymbol{a}$ je zrýchlenie ťažiska štvorstena. Hmotnosť elementárneho štvorstena je však nekonečne malá veličina tretieho rádu, zatiaľ čo plochy S_z, S_x, S_y a S sú nekonečne malé veličiny druhého rádu. V poslednej rovnici členy $m\boldsymbol{g}$ a $m\boldsymbol{a}$ môžeme teda aj pri pohybe elementov pružného telesa zanedbať a písať:

$$S\boldsymbol{\nu} = S_x\boldsymbol{\nu}_x + S_y\boldsymbol{\nu}_y + S_z\boldsymbol{\nu}_z$$

Plochy S_x, S_y a S_z, ak vektor $\boldsymbol{n}$ zviera s osami X, Y a Z uhly α, β a γ, sú však:

$$S_\alpha = S\cos\alpha = S\boldsymbol{n}\,.\,\boldsymbol{i}$$
$$S_y = S\cos\beta = S\boldsymbol{n}\,.\,\boldsymbol{j}$$
$$S_z = S\cos\gamma = S\boldsymbol{n}\,.\,\boldsymbol{k}$$

Napätie $\boldsymbol{\nu}$ je preto

$$\boldsymbol{\nu} = \boldsymbol{n}\,.\,\boldsymbol{i}\boldsymbol{\nu}_x + \boldsymbol{n}\,.\,\boldsymbol{j}\boldsymbol{\nu}_y + \boldsymbol{n}\,.\,\boldsymbol{k}\boldsymbol{\nu}_z = \boldsymbol{n}\,.\,(\boldsymbol{i}\boldsymbol{\nu}_x + \boldsymbol{j}\boldsymbol{\nu}_y + \boldsymbol{k}\boldsymbol{\nu}_z) = \boldsymbol{n}\,.\,\boldsymbol{N} \tag{1}$$

kde

$$\boldsymbol{N} = \boldsymbol{i}\boldsymbol{\nu}_x + \boldsymbol{j}\boldsymbol{\nu}_y + \boldsymbol{k}\boldsymbol{\nu}_z \tag{2}$$

je tzv. *tenzor napätia* v deformovanom pružnom telese.

Podľa vzorca (1) napätie, ktoré sa vzťahuje na plôšku v deformovanom telese ľubovoľne uloženú a ľubovoľne orientovanú, dostaneme, ak tenzor napätia v mieste tejto plôšky znásobíme skalárne, podľa odvodenia vzorca (1) zľava, jednotkovým vektorom na plôšku kolmým a príslušne orientovaným. Pomocou druhej vety impulzovej možno však dokázať, že tenzor $\boldsymbol{N}$ je symetrický, takže je tiež $\boldsymbol{\nu} = \boldsymbol{n}\,.\,\boldsymbol{N} = \boldsymbol{N}\,.\,\boldsymbol{n}$.

Podľa tejto vety súčet momentov všetkých vonkajších síl pôsobiacich na teleso alebo jeho časť vzhľadom na ľubovoľný bod sa rovná derivácii podľa času momentu hybnosti príslušnej časti telesa vzhľadom na ten istý bod. Sily pôsobiace na vybranú časť pevného telesa môžeme rozdeliť na sily objemové a plošné. *Sily objemové* sú sily, ktoré vyjadrujú vzájomný silový účinok telies alebo ich častí, ktoré sa bezprostredne nedotýkajú, zatiaľ čo *sily plošné* účinkujú práve len na týchto stykových plochách. Význačnou objemovou silou je tiaž.

Nech je $\boldsymbol{h}$ hustota objemových síl v pružnom telese, t. j. sila pripadajúca na objemovú jednotku telesa. Z Newtonovho zákona sily vyplýva potom rovnica

$$\int s\boldsymbol{a}\,\mathrm{d}\tau = \int \boldsymbol{h}\,\mathrm{d}\tau + \oint (\boldsymbol{n}\,.\,\boldsymbol{N})\,\mathrm{d}S = \int \boldsymbol{h}\,\mathrm{d}\tau + \oint \mathrm{d}\boldsymbol{S}\,.\,\boldsymbol{N} =$$

$$= \int \boldsymbol{h}\,\mathrm{d}\tau + \int (\operatorname{div}\boldsymbol{N})\,\mathrm{d}\tau$$

kde $\boldsymbol{a}$ je zrýchlenie ťažiska vybranej časti telesa a s merná hmotnosť.

Ale pretože integrácie po obidvoch stranách znamienka rovnosti sa vzťahujú na ten istý, inakšie však ľubovoľný objem, správna je aj rovnica

$$s\boldsymbol{a} = \boldsymbol{h} + \operatorname{div}\boldsymbol{N} \tag{3}$$

Rovnica (3) je základná pohybová rovnica pružného hmotného prostredia.

Ale podľa druhej vety impulzovej správna je aj rovnica

$$\int (\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{h})\,\mathrm{d}\tau + \oint \boldsymbol{r}\times(\mathrm{d}\boldsymbol{S}\,.\,\boldsymbol{N}) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int(\boldsymbol{r}\times s\boldsymbol{v})\,\mathrm{d}\tau$$

alebo

$$\int (\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{h})\,\mathrm{d}\tau - \oint \mathrm{d}\boldsymbol{S}\,.\,(\boldsymbol{N}\times\boldsymbol{r}) = \int(\boldsymbol{r}\times s\boldsymbol{a})\,\mathrm{d}\tau$$

$$\int (\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{h})\,\mathrm{d}\tau - \int \operatorname{div}(\boldsymbol{N}\times\boldsymbol{r})\,\mathrm{d}\tau = \int(\boldsymbol{r}\times s\boldsymbol{a})\,\mathrm{d}\tau$$

čiže aj

$$\boldsymbol{r}\times(\boldsymbol{h} - s\boldsymbol{a}) = \nabla\,.\,(\boldsymbol{N}\times\boldsymbol{r}) = (\operatorname{div}\boldsymbol{N})\times\boldsymbol{r} + \nabla_{\boldsymbol{r}}\,.\,(\boldsymbol{N}\times\boldsymbol{r})$$

kde symbol $\nabla_{\boldsymbol{r}}$ sa vzťahuje len na polohový vektor $\boldsymbol{r}$, teda, ak použijeme rovnicu (3),

$$\nabla_{\boldsymbol{r}}\,.\,(\boldsymbol{N}\times\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{r}\times(\boldsymbol{h} + \operatorname{div}\boldsymbol{N} - s\boldsymbol{a}) = 0$$

Výraz $\nabla_{\boldsymbol{r}}\,.\,(\boldsymbol{N}\times\boldsymbol{r})$ upravíme vyjadrením tenzora $\boldsymbol{N}$ v podobe súčtu diád, napríklad $\boldsymbol{N} = \Sigma\boldsymbol{a}_i\boldsymbol{b}_i$. Dostávame potom:

$$\nabla_{r}\,.\,(\boldsymbol{N}\times\boldsymbol{r}) = \nabla_{r}\,.\sum \boldsymbol{a}_i\boldsymbol{b}_i\times\boldsymbol{r} = \sum(\nabla_{r}\,.\,\boldsymbol{a}_i)\,(\boldsymbol{b}_i\times\boldsymbol{r}) =$$

$$= -\sum(\boldsymbol{a}_i\,.\nabla_{r})\,(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{b}_i) = -\sum\boldsymbol{a}_i\,.\,\boldsymbol{I}\times\boldsymbol{b}_i = -\sum\boldsymbol{a}_i\times\boldsymbol{b}_i$$

Ale $\nabla_{\boldsymbol{r}}\,.\,(\boldsymbol{N}\times\boldsymbol{r}) = 0$, takže aj $\Sigma\boldsymbol{a}_i\times\boldsymbol{b}_i = 0$, čo znamená, že tenzor $\boldsymbol{N}$ je symetrický, lebo $\boldsymbol{t} = \Sigma\boldsymbol{a}_i\times\boldsymbol{b}_i$ je jeho vektor a ten sa v našom prípade rovná nule.

Ak vektory $\boldsymbol{\nu}_x$, $\boldsymbol{\nu}_y$ a $\boldsymbol{\nu}_z$, ktoré vystupujú vo vyjadrení (2) tenzora $\boldsymbol{N}$, rozložíme na zložky, čiže ak píšeme:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\nu}_x &= \nu_{xx}\boldsymbol{i} + \nu_{xy}\boldsymbol{j} + \nu_{xz}\boldsymbol{k}\\ \boldsymbol{\nu}_y &= \nu_{yx}\boldsymbol{i} + \nu_{yy}\boldsymbol{j} + \nu_{yz}\boldsymbol{k}\\ \boldsymbol{\nu}_z &= \nu_{zx}\boldsymbol{i} + \nu_{zy}\boldsymbol{j} + \nu_{zz}\boldsymbol{k}\end{aligned}$$

tenzor $\boldsymbol{N}$ dostaneme v súradnicovom tvare

$$\begin{aligned}&\nu_{xx}\boldsymbol{ii} + \nu_{xy}\boldsymbol{ij} + \nu_{xz}\boldsymbol{ik} +\\ \boldsymbol{N} = &+\nu_{yx}\boldsymbol{ji} + \nu_{yy}\boldsymbol{jj} + \nu_{yz}\boldsymbol{jk} +\\ &+\nu_{zx}\boldsymbol{ki} + \nu_{zy}\boldsymbol{kj} + \nu_{zz}\boldsymbol{kk}\end{aligned}$$

Súradnice ν_{xx}, ν_{yy} a ν_{zz} sú zrejme veľkosti normálových zložiek príslušných napätí a ostatné súradnice — veľkosti zložiek tangenciálnych napätí. Tenzor $\boldsymbol{N}$ s iným označením sa preto píše obyčajne takto

$$\begin{aligned}&\sigma_{xx}\boldsymbol{ii} + \tau_{xy}\boldsymbol{ij} + \tau_{xz}\boldsymbol{ik} +\\ \boldsymbol{N} = &+\tau_{yx}\boldsymbol{ji} + \sigma_{yy}\boldsymbol{jj} + \tau_{yz}\boldsymbol{jk} +\\ &+\tau_{zx}\boldsymbol{ki} + \tau_{zy}\boldsymbol{kj} + \sigma_{zz}\boldsymbol{kk}\end{aligned} \tag{4}$$

pričom napríklad $\sigma_{xx} = \nu_{xx}$ je veľkosť normálového napätia pôsobiaceho v rovine YZ zo strany orientácie oxi X, alebo τ_{xy} je veľkosť y-ovej súradnice tangenciálneho napätia pôsobiaceho v tejto rovine a podobne.

Ak je napríklad $\sigma_{xx} > 0$, znamená to, že na rovinu YZ účinkuje hmotné prostredie, ktoré je na tej strane roviny YZ, na ktorú je orientovaná os X, silou príťažlivou, čiže v smere osi X je v telese ťah. Rovnaký význam majú aj znamienka súradníc σ_{yy} a σ_{zz}.

Tenzor napätia vyjadruje stav napätia v tom bode deformovaného pružného telesa, na ktorý sa vzťahuje. Deformované pružné teleso svojou deformáciou definuje v každom svojom bode ešte iný tenzor, ktorý sa volá *tenzor deformácie* a vyjadruje deformáciu telesa v okolí príslušného bodu.

Za účelom jeho odvodenia zvoľme si v pružnom telese tri jeho blízke body O, A a B, ktoré neležia v jednej priamke, a bod O urobme začiatkom súradnicového systému osí XYZ. Os X nech leží aj za deformácie telesa stále v priamke OA a os Y stále v rovine bodov O, A a B. Touto voľbou poloha osi Z v telese je už dostatočne určená.

Pri deformovaní pružného telesa polohy jednotlivých jeho bodov aj vzhľadom na tento systém sa zmenia. Nech je $\boldsymbol{u}$ posunutie — spôsobené deformáciou telesa — toho bodu telesa, ktorého polohový vektor vzhľadom na bod O pred deformáciou telesa bol $\boldsymbol{r}$, takže vektor $\boldsymbol{u}$ je závislý od vektora $\boldsymbol{r}$. Pretože posunutie bodu O sa v systéme, v ktorom je tento bod stále začiatkom, rovná nule, posunutie bodov telesa v dostatočne malom okolí bodu O môžeme písať ako diferenciály funkcie $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{r})$, teda

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{r} \,.\, \mathrm{grad}\, \boldsymbol{u} = \boldsymbol{r} \,.\, \nabla \boldsymbol{u}$$

Vo všeobecnosti gradient vektora nie je symetrický tenzor. Každý tenzor druhého stupňa, teda aj grad $\boldsymbol{u}$, môžeme však rozložiť na súčet symetrického a antisymetrického tenzora takto:

$$\mathrm{grad}\, \boldsymbol{u} = \nabla \boldsymbol{u} = \frac{1}{2}(\nabla \boldsymbol{u} + \boldsymbol{u}\nabla) + \frac{1}{2}(\nabla \boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}\nabla)$$

takže

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{r} \,.\, \frac{1}{2}(\nabla \boldsymbol{u} + \boldsymbol{u}\nabla) + \boldsymbol{r} \,.\, \frac{1}{2}(\nabla \boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}\nabla) = \boldsymbol{r} \,.\, \frac{1}{2}(\nabla \boldsymbol{u} + \boldsymbol{u}\nabla) +$$

$$+ \frac{1}{2}[(\boldsymbol{r} \,.\, \nabla)\, \boldsymbol{u} - (\boldsymbol{r} \,.\, \boldsymbol{u})\nabla] = \boldsymbol{r} \,.\, \frac{1}{2}(\nabla \boldsymbol{u} + \boldsymbol{u}\nabla) + \frac{1}{2}(\nabla \times \boldsymbol{u}) \times \boldsymbol{r} =$$

$$= \boldsymbol{r} \,.\, \boldsymbol{D} + \frac{1}{2}(\mathrm{rot}\, \boldsymbol{u}) \times \boldsymbol{r}$$

Vektorový súčin $\frac{1}{2}(\mathrm{rot}\, \boldsymbol{u}) \times \boldsymbol{r}$ pri malých deformáciách tuhého telesa (a pružné deformácie sú vždy malé) znamená však len pootočenie okolia bodu O o uhol $\frac{1}{2}\,\mathrm{rot}\, \boldsymbol{u}$ vzhľadom na súradnicový systém, ktorý sme viazali na deformujúce sa teleso pomocou jeho náhodile zvolených bodov O, A a B. Vzhľadom na súradnicový systém viazaný na tuhé teleso pomocou iných jeho bodov je toto pootočenie iné a možno dokázať, že pri vhodnej voľbe bodov O, A a B sa rovná nule. Druhý člen v predchádzajúcom vzorci neprispieva teda k deformácii telesa v okolí jeho bodu O, takže táto je úplne určená už členom prvým. Preto pri vyšetrovaní deformácie elementárneho objemu telesa stačí brať do úvahy len člen prvý, a pre polohový vektor $\boldsymbol{r}'$ deformáciou posunutého bodu písať len

$$\boldsymbol{r}' = \boldsymbol{r} + \boldsymbol{r} \,.\, \boldsymbol{D} = \boldsymbol{r} \,.\, (\boldsymbol{I} + \boldsymbol{D}) \tag{5}$$

Symetrický tenzor

$$\boldsymbol{D} = \frac{1}{2}(\nabla \boldsymbol{u} + \boldsymbol{u}\nabla) \tag{6}$$

sa volá tenzor deformácie pevného telesa v tom jeho bode, na ktorý sa vzťahuje.

Ak vektor $\boldsymbol{u}$ napíšeme ako súčet jeho zložiek, $\boldsymbol{u} = u\boldsymbol{i} + v\boldsymbol{j} + w\boldsymbol{k}$, tenzor deformácie $\boldsymbol{D}$ dostaneme v súradnicovom tvare

$$\boldsymbol{D} = \begin{array}{lll} \dfrac{\partial u}{\partial x}\boldsymbol{ii} + & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial v}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial y}\right)\boldsymbol{ij} + & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial w}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial z}\right)\boldsymbol{ik} + \\ + \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial x}\right)\boldsymbol{ji} + & \dfrac{\partial v}{\partial y}\boldsymbol{jj} + & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial w}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial z}\right)\boldsymbol{jk} + \\ + \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u}{\partial z} + \dfrac{\partial w}{\partial x}\right)\boldsymbol{ki} + & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial v}{\partial z} + \dfrac{\partial w}{\partial y}\right)\boldsymbol{kj} + & \dfrac{\partial w}{\partial z}\boldsymbol{kk} \end{array} \tag{7}$$

S významom súradníc tenzora napätia sme sa už oboznámili. Nájdeme názorný význam súradníc aj tenzora deformácie.

Nech je $\boldsymbol{r}$ polohový vektor ľubovoľného bodu C telesa v blízkom okolí jeho bodu O, v ktorom tenzor deformácie telesa po jeho deformovaní je $\boldsymbol{D}$. Keď za deformácie polohový vektor bodu C' je $\boldsymbol{r}'$, podiel

$$\varepsilon = \frac{|\boldsymbol{r}'| - |\boldsymbol{r}|}{|\boldsymbol{r}|} \tag{8}$$

je relatívne predĺženie úsečky OC.

Nech sú $\boldsymbol{e}$ a $\boldsymbol{e}'$ jednotkové vektory v smeroch vektorov $\boldsymbol{r}$ a $\boldsymbol{r}'$. Pri malých deformáciách absolútna hodnota vektora $\boldsymbol{r}'$ sa líši len málo od hodnoty jeho priemetu na vektor $\boldsymbol{r}$. Podľa vzorca (5) je preto

$$|\boldsymbol{r}'| \doteq \boldsymbol{r}' \cdot \boldsymbol{e} = (\boldsymbol{r} + \boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{D}) \cdot \boldsymbol{e} = |\boldsymbol{r}| + |\boldsymbol{r}| (\boldsymbol{e} \cdot \boldsymbol{D} \cdot \boldsymbol{e})$$

takže relatívne predĺženie v smere vektora $\boldsymbol{e}$ je:

$$\varepsilon_e = \frac{|\boldsymbol{r}'| - |\boldsymbol{r}|}{|\boldsymbol{r}|} = \boldsymbol{e} \cdot \boldsymbol{D} \cdot \boldsymbol{e} \tag{9}$$

Podľa tohto vzorca relatívne predĺženia v smeroch súradnicových osí sú:

$$\varepsilon_{xx} = \boldsymbol{i} \cdot \boldsymbol{D} \cdot \boldsymbol{i} = \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\varepsilon_{yy} = \boldsymbol{j} \cdot \boldsymbol{D} \cdot \boldsymbol{j} = \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\varepsilon_{zz} = \boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{D} \cdot \boldsymbol{k} = \frac{\partial w}{\partial z}$$

Objem vybraný ľubovoľne vo vnútri telesa sa pri deformácii telesa zväčší o hodnotu

$$\Delta V = \oint \boldsymbol{u} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \int (\operatorname{div} \boldsymbol{u})\, \mathrm{d}\tau$$

Relatívne zväčšenie objemu kdekoľvek vo vnútri deformovaného telesa je teda

$$e = \lim_{V \to 0} \frac{\Delta V}{V} = \lim_{V \to 0} \frac{1}{V} \int (\operatorname{div} \boldsymbol{u}) \, d\tau = \operatorname{div} \boldsymbol{u}$$

pričom

$$\operatorname{div} \boldsymbol{u} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}$$

Za účelom vyšetrenia významu vedľajších súradníc tenzora $\boldsymbol{D}$ vektor $\boldsymbol{r}'$ napíšeme v tvare súčinu $\boldsymbol{r}' = |\,\boldsymbol{r}'\,|\,\mathbf{e}'$. Máme potom

$$|\,\boldsymbol{r}'\,|\,\mathbf{e}' = \boldsymbol{r}' = \boldsymbol{r} + \boldsymbol{r} \,.\, \boldsymbol{D} = \boldsymbol{r} \,.\, (\boldsymbol{I} + \boldsymbol{D}) = \mathbf{e} \,.\, (\boldsymbol{I} + \boldsymbol{D})\,|\,\boldsymbol{r}\,|$$

alebo, ak použijeme aj definíciu relatívneho predĺženia danú vzorcom (8)

$$\mathbf{e}' = \mathbf{e} \,.\, (\boldsymbol{I} + \boldsymbol{D}) \frac{|\,\boldsymbol{r}\,|}{|\,\boldsymbol{r}'\,|} = \frac{\mathbf{e} \,.\, (\boldsymbol{I} + \boldsymbol{D})}{1 + \varepsilon_e} \tag{10}$$

kde ε_e je relatívne predĺženie v smere vektora $\mathbf{e}$ a $\boldsymbol{I}$ je tenzor identity.

Dva jednotkové, na teleso viazané vektory $\mathbf{e}_1$ a $\mathbf{e}_2$, ktoré pred deformáciou zvierali spolu uhol φ, po deformácii telesa zvierajú uhol $\varphi' = \varphi - 2\gamma$. Pomocou vzorca (10) pre uhol γ môžeme napísať rovnicu

$$(1 + \varepsilon_1)(1 + \varepsilon_2)\, \mathbf{e}_1' \,.\, \mathbf{e}_2' = \mathbf{e}_1 \,.\, (\boldsymbol{I} + \boldsymbol{D}) \,.\, (\boldsymbol{I} + \boldsymbol{D}) \,.\, \mathbf{e}_2$$

t. j.

$$(1 + \varepsilon_1)(1 + \varepsilon_2) \cos (\varphi - 2\gamma) = \mathbf{e}_1 \,.\, (\boldsymbol{I} + 2\boldsymbol{D} + \boldsymbol{D} \,.\, \boldsymbol{D}) \,.\, \mathbf{e}_2 = \\ = \cos \varphi + 2\mathbf{e}_1 \,.\, \boldsymbol{D} \,.\, \mathbf{e}_2$$

lebo člen

$$\mathbf{e}_1 \,.\, \boldsymbol{D} \,.\, \boldsymbol{D} \,.\, \mathbf{e}_2$$

v ktorom sú len súčiny parciálnych derivácií posunutia $\boldsymbol{u}$, je zanedbateľne malý. Z predchádzajúcej rovnice vyplýva ($\cos 2\gamma \doteq 1$, $\sin 2\gamma \doteq 2\gamma$, $\varepsilon_1\varepsilon_2 = \gamma\varepsilon_1 = \gamma\varepsilon_2 \doteq 0$):

$$(1 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2)(\cos \varphi + 2\gamma \sin \varphi) = \cos \varphi + 2\mathbf{e}_1 \,.\, \boldsymbol{D} \,.\, \mathbf{e}_2$$

alebo

$$(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \cos \varphi + 2\gamma \sin \varphi = 2\mathbf{e}_1 \,.\, \boldsymbol{D} \,.\, \mathbf{e}_2 \tag{11}$$

Keď teda uhol φ je pravý, jeho zmenšenie pri deformácii telesa je:

$$2\gamma = 2\mathbf{e}_1 \,.\, \boldsymbol{D} \,.\, \mathbf{e}_2 \tag{12}$$

Polovičné zmenšenia uhlov zovretých pred deformáciou telesa osami X, Y a Z sú preto

$$\left.\begin{aligned}
\gamma_{xy} &= \gamma_{yx} = \boldsymbol{i} \,.\, \boldsymbol{D} \,.\, \boldsymbol{j} = \boldsymbol{j} \,.\, \boldsymbol{D} \,.\, \boldsymbol{i} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right) \\
\gamma_{yz} &= \gamma_{zy} = \boldsymbol{j} \,.\, \boldsymbol{D} \,.\, \boldsymbol{k} = \boldsymbol{k} \,.\, \boldsymbol{D} \,.\, \boldsymbol{j} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\right) \\
\gamma_{zx} &= \gamma_{xz} = \boldsymbol{k} \,.\, \boldsymbol{D} \,.\, \boldsymbol{i} = \boldsymbol{i} \,.\, \boldsymbol{D} \,.\, \boldsymbol{k} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right)
\end{aligned}\right\} \qquad (13)$$

S použitím získaných výsledkov tenzor deformácie pružného telesa môžeme písať aj takto

$$\begin{aligned}
& \varepsilon_{xx}\boldsymbol{ii} + \gamma_{xy}\boldsymbol{jj} + \gamma_{xz}\boldsymbol{ik} + \\
D = & +\gamma_{yx}\boldsymbol{ji} + \varepsilon_{yy}\boldsymbol{jj} + \gamma_{yz}\boldsymbol{jk} + \\
& +\gamma_{zx}\boldsymbol{ki} + \gamma_{zy}\boldsymbol{kj} + \varepsilon_{zz}\boldsymbol{kk}
\end{aligned}$$

Hlavné súradnice tenzora deformácie sú teda *relatívne predĺženia v smeroch osí a jeho vedľajšie súradnice sa rovnajú polovičným zmenšeniam uhlov, ktorých ramená pred deformáciou telesa boli so súradnicovými osami rovnobežné.*

Pretože tenzor napätia aj tenzor deformácie sú tenzory symetrické, vzhľadom na osi ich grafických obrazov ich vedľajšie súradnice sa rovnajú nule a tenzory $\boldsymbol{N}$ a $\boldsymbol{D}$ sú len

$$\boldsymbol{N} = \sigma_1\boldsymbol{ii} + \sigma_2\boldsymbol{jj} + \sigma_3\boldsymbol{kk} \qquad (14)$$

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon_1\boldsymbol{ii} + \varepsilon_2\boldsymbol{jj} + \varepsilon_3\boldsymbol{kk} \qquad (15)$$

Poznámka: Pri anizotropných telesách osi grafických obrazov tenzora napätia a tenzora deformácie vo všeobecnosti nesplývajú.

Hlavnou úlohou náuky o pružnosti pevných telies je nájsť súvis, a to pre telesá izotropné aj anizotropné, medzi tenzorom napätia a deformácie. Vyjadrujú ho tzv. *moduly pružnosti*. Vo svojich ďalších úvahách budeme sa však zaoberať len telesami izotropnými, t. j. telesami, ktorých vlastnosti nie sú závislé od smerov, v ktorých sa zisťujú.

5.3. Modul pružnosti v ťahu a šmyku. Uvažujme o napínaní drôtu dĺžky l_0 a prierezu q_0, ktorý je zhotovený z pružného materiálu. Drôt nech je napínaný silou F *(obr. 5.8)*, za účinku ktorej dĺžka drôtu je $l = l_0 + \Delta l$, takže relatívne predĺženie je:

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0} = \frac{l - l_0}{l_0} \qquad (1)$$