Polovičné zmenšenia uhlov zovretých pred deformáciou telesa osami X, Y a Z sú preto

$$\left.\begin{aligned}
\gamma_{xy} &= \gamma_{yx} = \boldsymbol{i}\,.\,\boldsymbol{D}\,.\,\boldsymbol{j} = \boldsymbol{j}\,.\,\boldsymbol{D}\,.\,\boldsymbol{i} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right)\\
\gamma_{yz} &= \gamma_{zy} = \boldsymbol{j}\,.\,\boldsymbol{D}\,.\,\boldsymbol{k} = \boldsymbol{k}\,.\,\boldsymbol{D}\,.\,\boldsymbol{j} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\right)\\
\gamma_{zx} &= \gamma_{xz} = \boldsymbol{k}\,.\,\boldsymbol{D}\,.\,\boldsymbol{i} = \boldsymbol{i}\,.\,\boldsymbol{D}\,.\,\boldsymbol{k} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right)
\end{aligned}\right\} \tag{13}$$

S použitím získaných výsledkov tenzor deformácie pružného telesa môžeme písať aj takto

$$D = \begin{array}{l}
\varepsilon_{xx}\boldsymbol{ii} + \gamma_{xy}\boldsymbol{jj} + \gamma_{xz}\boldsymbol{ik} + \\
+\gamma_{yx}\boldsymbol{ji} + \varepsilon_{yy}\boldsymbol{jj} + \gamma_{yz}\boldsymbol{jk} + \\
+\gamma_{zx}\boldsymbol{ki} + \gamma_{zy}\boldsymbol{kj} + \varepsilon_{zz}\boldsymbol{kk}
\end{array}$$

Hlavné súradnice tenzora deformácie sú teda *relatívne predĺženia v smeroch osí a jeho vedľajšie súradnice sa rovnajú polovičným zmenšeniam uhlov, ktorých ramená pred deformáciou telesa boli so súradnicovými osami rovnobežné.*

Pretože tenzor napätia aj tenzor deformácie sú tenzory symetrické, vzhľadom na osi ich grafických obrazov ich vedľajšie súradnice sa rovnajú nule a tenzory $\boldsymbol{N}$ a $\boldsymbol{D}$ sú len

$$\boldsymbol{N} = \sigma_1\boldsymbol{ii} + \sigma_2\boldsymbol{jj} + \sigma_3\boldsymbol{kk} \tag{14}$$

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon_1\boldsymbol{ii} + \varepsilon_2\boldsymbol{jj} + \varepsilon_3\boldsymbol{kk} \tag{15}$$

Poznámka: Pri anizotropných telesách osi grafických obrazov tenzora napätia a tenzora deformácie vo všeobecnosti nesplývajú.

Hlavnou úlohou náuky o pružnosti pevných telies je nájsť súvis, a to pre telesá izotropné aj anizotropné, medzi tenzorom napätia a deformácie. Vyjadrujú ho tzv. *moduly pružnosti*. Vo svojich ďalších úvahách budeme sa však zaoberať len telesami izotropnými, t. j. telesami, ktorých vlastnosti nie sú závislé od smerov, v ktorých sa zisťujú.

5.3. Modul pružnosti v ťahu a šmyku. Uvažujme o napínaní drôtu dĺžky l_0 a prierezu q_0, ktorý je zhotovený z pružného materiálu. Drôt nech je napínaný silou F *(obr. 5.8)*, za účinku ktorej dĺžka drôtu je $l = l_0 + \Delta l$, takže relatívne predĺženie je:

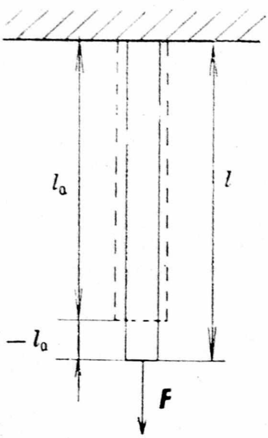
$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0} = \frac{l - l_0}{l_0} \tag{1}$$

Podľa Hookovho zákona *napätie v ťahu* pôsobiace v priečnom reze drôtu, $\sigma = \frac{F}{q_0}$, je *úmerné relatívnemu predĺženiu*,

$$\sigma = E\varepsilon \tag{2}$$

Konštanta úmernosti E sa volá *modul pružnosti v ťahu.* Pretože relatívne predĺženie ε je veličina bezrozmerná, modul pružnosti E má rozmer napätia, a v technickej praxi sa obyčajne udáva v kp/cm². Modul pružnosti ocele je napríklad približne $2 \cdot 10^6$ kpcm^{-2}.

Pri stlačovaní valca alebo hranola silami na základne kolmými relatívne predĺženie v smere osi telesa je záporné, keďže v tomto prípade je $l < l_0$. V priečnom reze telesa nie je však teraz ťah, ale tlak, takže veľkosť napätia za tlaku je tiež záporná. Rovnica (2) platí teda nielen pre napínanie, ale aj pre stláčanie valcov alebo hranolov, no len pokiaľ sú dosť krátke, aby pri zaťažení nenastalo vybočenie na stranu, lebo vtedy máme pred sebou už zložitejší jav, stláčanie spojené s ohybom.



Obr. 5.8

Z rovníc (1) a (2) vyplýva, že dĺžka napínaného drôtu (alebo stláčaného valca) je:

$$l = l_0(1 + \varepsilon) = l_0\left(1 + \frac{\sigma}{E}\right) \tag{3}$$

pričom pri stláčaní veľkosť napätia σ treba brať záporne.

Podľa experimentálnej skúsenosti každé predĺženie (skrátenie) tyče je sprevádzané zmenšením (zväčšením) jej priečneho rezu. Pri napínaní (pozdĺžnom stláčaní) tyče dĺžka v priečnom reze tyče a_0 sa zmenší (zväčší) na a. Relatívne priečne skrátenie je:

$$\eta = \frac{a_0 - a}{a_0} \tag{4}$$

a je úmerné relatívnemu predĺženiu telesa v smere pôsobiacej sily,

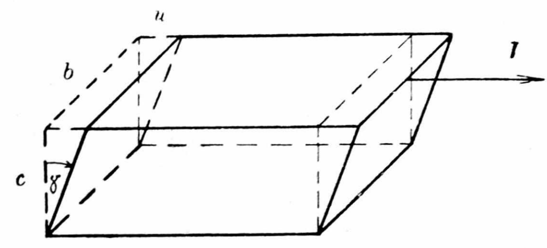
$$\eta = k\varepsilon = \frac{1}{m}\,\varepsilon = \frac{\sigma}{mE} \tag{5}$$

Recipročná hodnota konštanty úmernosti k, $m = \frac{1}{k}$, sa nazýva *Poissonova konštanta.* Udáva, koľko ráz je relatívne predĺženie väčšie než priečne skrátenie. Jej priemerná hodnota pri rôznych látkach je $m = 3{,}3$. Zo vzorcov (4) a (5) vyplýva pre priečny rozmer pozdĺžne namáhaného telesa vyjadrenie

$$a = a_0(1 - \eta) = a_0\left(1 - \frac{\sigma}{mE}\right) \tag{6}$$

Teraz sa budeme zaoberať namáhaním pružných telies šmykom. Dolná základňa pravouhlého hranola s rozmermi a, b a c nech je upevnená a na hornú základňu nech účinkuje tangenciálna sila T *(obr. 5.9)*. Účinkom tangenciálneho napätia $\tau = \frac{T}{ab}$ sa horná základňa pružného hranola posunie o dĺžku u. Podiel $\gamma = \frac{u}{c}$ sa volá *relatívne posunutie* hornej základne pružného šmykom namáhaného hranola vzhľadom na základňu dolnú a rovná sa približne zmenšeniu pôvodne pravého uhla medzi dvoma stenami hranola. Keď je hranol dosť nízky, aby nenastal aj ohyb, podľa Hookovho zákona je:

$$\tau = G\gamma \tag{7}$$



Obr. 5.9

slovami: *tangenciálne napätie je úmerné príslušnému relatívnemu posunutiu.* Konštanta úmernosti vo vzťahu (7), ktorá podobne ako modul pružnosti v ťahu má tiež rozmer napätia, sa nazýva *modul pružnosti v šmyku.* Z definície relatívneho posunutia a zo vzorca (7) vyplýva, že posunutie je

$$u = c\gamma = \frac{\tau}{G}c \tag{8}$$

Modul pružnosti v ťahu E, modul pružnosti v šmyku G a Poissonova konštanta m charakterizujú, ako sa chovajú telesá pri ich pružných deformáciách. Nie sú to však konštanty od seba nezávislé. Medzi nimi je vzťah (Poissonov)

$$G = \frac{mE}{2(m + 1)} \tag{9}$$

ktorý umožňuje výpočet ktorejkoľvek z týchto troch konštánt, ak sú známe dve z nich.

Poissonov vzťah možno odvodiť rôznym spôsobom. Vyplýva aj z veľmi dôležitého vzťahu medzi tenzorom napätia a deformácie. Pre odvodenie tohto vzťahu vnútri deformovaného pružného telesa predstavme si pravouhlý hranol s hranami rovnobežnými so spoločnými osami grafických obrazov tenzorov napätia a deformácie, čiže s priamkami, ktoré ak boli zvolené za osi súradnicové, vedľajšie súradnice týchto tenzorov sa rovnajú nule. Rozmery hranola pred deformáciou telesa nech sú a_1, a_2 a a_3. Keď na steny kolmé na hranu a_1 účinkuje napätie σ_1, dĺžka pôvodne a_1 je a'_1. Relatívne predĺženie vyvolané len týmto napätím je

$$\frac{a'_1 - a_1}{a_1} = \frac{\sigma_1}{E}$$

Predĺženie hranola v smere hrany a_1, ako už vieme, má však za následok skrátenie jeho priečnych rozmerov, dané vzorcom (5),

$$\frac{a_2 - a'_2}{a_2} = \frac{\sigma_1}{mE}$$

$$\frac{a_3 - a'_3}{a_3} = \frac{\sigma_1}{mE}$$

Keď teda napätia účinkujú na všetky strany hranola, relatívne predĺženia jeho rozmerov sú:

$$\varepsilon_1 = \frac{\sigma_1}{E} - \frac{\sigma_2}{mE} - \frac{\sigma_3}{mE} = \frac{1+m}{mE}\sigma_1 - \frac{1}{mE}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)$$
$$\varepsilon_2 = \frac{\sigma_2}{E} - \frac{\sigma_3}{mE} - \frac{\sigma_1}{mE} = \frac{1+m}{mE}\sigma_2 - \frac{1}{mE}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)$$
$$\varepsilon_3 = \frac{\sigma_3}{E} - \frac{\sigma_1}{mE} - \frac{\sigma_2}{mE} = \frac{1+m}{mE}\sigma_3 - \frac{1}{mE}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)$$

takže tenzor deformácie je:

$$\mathbf{D} = \varepsilon_1 \mathbf{ii} + \varepsilon_2 \mathbf{jj} + \varepsilon_3 \mathbf{kk} = \frac{1+m}{mE}\mathbf{N} - \frac{\sigma}{mE}\mathbf{I} \tag{10}$$

kde $\sigma = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3$ a $\mathbf{I}$ je tenzor identity.

Len pre úplnosť odvodíme aj vyjadrenie tenzora napätia $\mathbf{N}$ pomocou tenzora deformácie $\mathbf{D}$. Sčítaním rovníc vyjadrujúcich relatívne posunutia ε_1, ε_2 a ε_3 dostávame:

$$\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = \frac{\sigma}{E} - \frac{2}{mE}\sigma = \frac{m-2}{mE}\sigma$$

čo dosadené do rovnice (10) dáva:

$$\mathbf{D} = \frac{1+m}{mE}\mathbf{N} - \frac{\varepsilon}{m-2}\mathbf{I}$$

takže

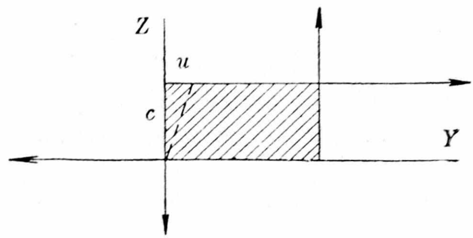
$$\mathbf{N} = \frac{mE}{1+m}\left(\mathbf{D} + \frac{\varepsilon}{m-2}\mathbf{I}\right) = \frac{mE}{1+m}\mathbf{D} + \frac{m\varepsilon E}{(m+1)(m-2)}\mathbf{I} \tag{11}$$

kde $\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3$.

Za účelom odvodenia Poissonovho vzťahu (9) majme na mysli deformovanie pružného pravouhlého hranola pomocou dvoch dvojíc síl v rovnováhe, ako je to znázornené na *obr. 5.10*. Pri takomto namáhaní hranola a pri voľbe pravouhlého súradnicového systému podľa obrázku hlavné súradnice tenzora napätia sa rovnajú nule, a z vedľajších súradníc nerovnajú sa nule len súradnice τ_{yz} a τ_{zy}, ktoré podľa vzorca (7) sú:

$$\tau_{yz} = \tau_{zy} = G\gamma = G\,\frac{u}{c}$$

Vzhľadom na tie isté osi X, Y a Z súradnice tenzora deformácie $\mathbf{D}$ sú $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = 0$ a z vedľajších súradníc sa nerovnajú nule tiež len súradnice $\gamma_{yz} = \gamma_{zy} = \frac{1}{2}\gamma = \frac{u}{2c}$.



Obr. 5.10

Ak v rovnici (10) tenzory $\mathbf{D}$ a $\mathbf{N}$ vyjadríme pomocou týchto ich súradníc, dostávame rovnicu

$$\gamma_{yz}\mathbf{jk} + \gamma_{zy}\mathbf{kj} = \frac{1+m}{mE}(\tau_{yz}\mathbf{jk} + \tau_{zy}\mathbf{kj})$$

t. j. rovnicu

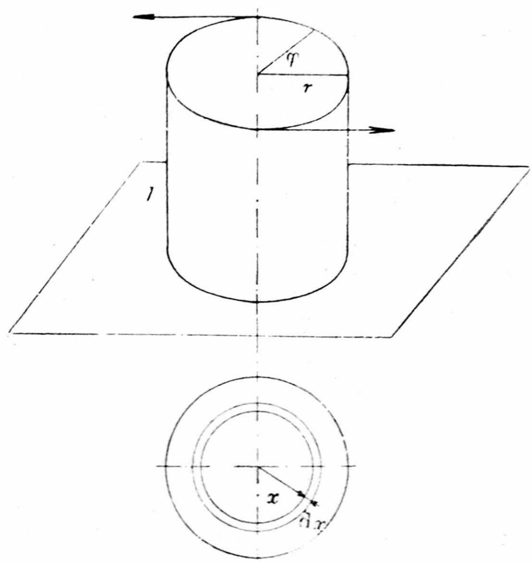
$$\frac{u}{2c}(\mathbf{jk} + \mathbf{kj}) = \frac{1+m}{mE}\,G\,\frac{u}{c}\,(\mathbf{jk} + \mathbf{kj})$$

z ktorej vyplýva

$$\frac{u}{2c} = \frac{1+m}{mE}\,G\,\frac{u}{c}$$

teda

$$G = \frac{mE}{2(m+1)} \tag{12}$$



Obr. 5.11

5.4. Meranie modulov pružnosti v ťahu a šmyku. Modul pružnosti v ťahu E môžeme určiť z pretiahnutia drôtu. Drôt dĺžky l, s prierezom q, zaťažený silou F sa predĺži o dĺžku Δl určenú vzorcom

$$\Delta l = \frac{1}{E}\,\frac{F}{q}\,l$$

z ktorého možno vypočítať modul pružnosti v ťahu,

$$E = \frac{l}{\Delta l}\,\frac{F}{q}$$

Modul pružnosti v šmyku môžeme určiť zo skrútenia tyče na jednom konci upevnenej a na druhom *(obr. 5.11)* stáčanej dvojicou síl s momentom so smerom tyče rovnobežným.