systému podľa obrázku hlavné súradnice tenzora napätia sa rovnajú nule, a z vedľajších súradníc nerovnajú sa nule len súradnice τ_{yz} a τ_{zy}, ktoré podľa vzorca (7) sú:

$$\tau_{yz} = \tau_{zy} = G\gamma = G\,\frac{u}{c}$$

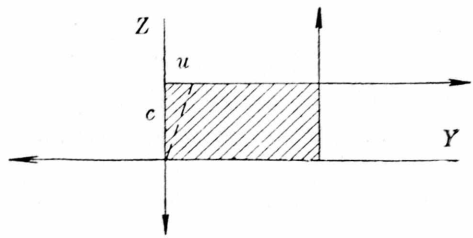
Vzhľadom na tie isté osi X, Y a Z súradnice tenzora deformácie $\mathbf{D}$ sú $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = 0$ a z vedľajších súradníc sa nerovnajú nule tiež len súradnice $\gamma_{yz} = \gamma_{zy} = \frac{1}{2}\gamma = \frac{u}{2c}$.

Ak v rovnici (10) tenzory $\mathbf{D}$ a $\mathbf{N}$ vyjadríme pomocou týchto ich súradníc, dostávame rovnicu

$$\gamma_{yz}\mathbf{jk} + \gamma_{zy}\mathbf{kj} = \frac{1+m}{mE}(\tau_{yz}\mathbf{jk} + \tau_{zy}\mathbf{kj})$$

t. j. rovnicu

$$\frac{u}{2c}(\mathbf{jk} + \mathbf{kj}) = \frac{1+m}{mE}\,G\,\frac{u}{c}\,(\mathbf{jk} + \mathbf{kj})$$



Obr. 5.10

z ktorej vyplýva

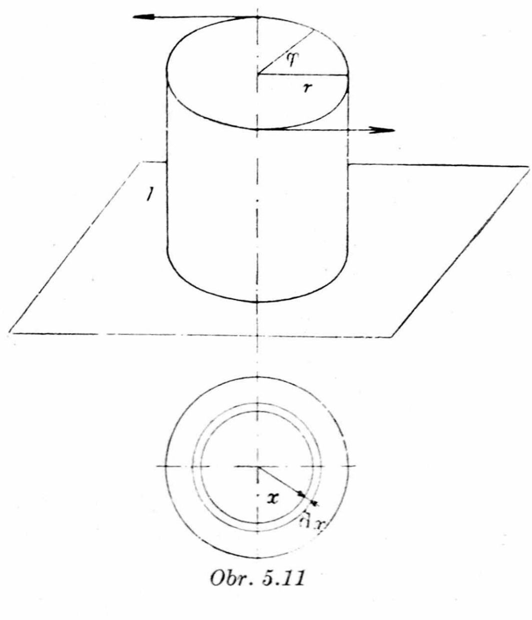
$$\frac{u}{2c} = \frac{1+m}{mE}\,G\,\frac{u}{c}$$

teda

$$G = \frac{mE}{2(m+1)} \tag{12}$$

5.4. Meranie modulov pružnosti v ťahu a šmyku. Modul pružnosti v ťahu E môžeme určiť z pretiahnutia drôtu. Drôt dĺžky l, s prierezom q, zaťažený silou F sa predĺži o dĺžku Δl určenú vzorcom

$$\Delta l = \frac{1}{E}\,\frac{F}{q}\,l$$



Obr. 5.11

z ktorého možno vypočítať modul pružnosti v ťahu,

$$E = \frac{l}{\Delta l}\,\frac{F}{q}$$

Modul pružnosti v šmyku môžeme určiť zo skrútenia tyče na jednom konci upevnenej a na druhom *(obr. 5.11)* stáčanej dvojicou síl s momentom so smerom tyče rovnobežným.

Celkové stočenie tyče dĺžky l a polomeru r nech je φ. Stočenie pripadajúce na jednotku dĺžky tyče je potom φ/l. Vlákno tyče vo vzdialenosti x od stredu tyče má pomerné posunutie

$$\gamma = x\frac{\varphi}{l}$$

čím vzniká v tom mieste tangenciálne napätie

$$\tau = G\gamma = Gx\frac{\varphi}{l}$$

Na elementárne medzikružie s polomerom x a šírkou $\mathrm{d}x$, takže jeho plocha je $\mathrm{d}S = 2\pi x\,\mathrm{d}x$, pôsobí tangenciálna sila

$$\mathrm{d}T = \tau\,\mathrm{d}S = Gx\frac{\varphi}{l}2\pi x\,\mathrm{d}x = 2\pi G\,.\,\frac{\varphi}{l}x^2\,\mathrm{d}x$$

Jej moment vzhľadom na os je $\mathrm{d}D = x\,\mathrm{d}T = 2\pi G\,.\,\frac{\varphi}{l}x^3\,\mathrm{d}x$. Celkový moment síl, účinkujúcich na celom priereze, je:

$$D = \int_0^r \mathrm{d}D = 2\pi G\frac{\varphi}{l}\int_0^r x^3\,\mathrm{d}x = \frac{\pi G\varphi r^4}{2l} \tag{1}$$

a rovná sa momentu vonkajšej dvojice. Keď poznáme vonkajšiu dvojicu, môžeme z nameraných rozmerov tyče a jej stočenia vypočítať modul pružnosti v šmyku (metóda statická),

$$G = \frac{2lD}{\pi\varphi r^4} \tag{2}$$

Pretože pri skrúcaní tyče (drôtu) uplatňuje sa *modul pružnosti* v šmyku, volá sa tento modul aj *modul pružnosti v torzii.*

Namiesto práve opísanej tzv. *statickej* metódy merania modulu pružnosti v šmyku možno použiť aj metódu *dynamickú*, založenú na vlastnostiach torzného kyvadla. Podľa vzorca (4.10.4) druhá mocnina periódy pohybu torzného kyvadla je:

$$T^2 = 4\pi^2\frac{J}{D_0}$$

kde D_0 je direkčný moment, ktorý podľa vzorca (1), $D = \frac{\pi G r^4}{2l}\varphi$ je $D_0 = \frac{\pi G r^4}{2l}$. Teda

$$T^2 = 4\pi^2\frac{J}{D_0} = \frac{8\pi l J}{G r^4}$$

z čoho

$$G = \frac{8\pi l J}{T^2 r^4} \tag{3}$$

S modulmi pružnosti pružného materiálu v ťahu a šmyku súvisí jeho *koeficient stlačiteľnosti*, definovaný ako relatívne zmenšenie objemu vyvolané jednotkovým zväčšením vonkajšieho tlaku,

$$\varkappa = -\frac{1}{V_0} \cdot \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}p} \tag{4}$$

Jeho súvis s modulmi pružnosti, resp. s modulom pružnosti v ťahu a Poissonovou konštantou, nájdeme takto:

Predstavme si hranol z pružného materiálu s rozmermi a_0, b_0, c_0 a podrobme ho rovnomernému vonkajšiemu tlaku p. Pôsobením tlaku len na základne pôvodne s rozmermi a_0 a b_0 by sa rozmer pôvodne c_0 zmenil na $c' = c_0(1 - p/E)$. Ale keďže tlak účinkuje aj na bočné steny, nastane aj predĺženie rozmeru, teraz hodnoty c', podľa vzorca (*5.3.6*), na

$$c = c'\left(1 + \frac{p}{mE}\right)^2 = c_0\left(1 - \frac{p}{E}\right)\left(1 + \frac{p}{mE}\right)^2 \doteq c_0\left(1 - \frac{p}{E}\right)\left(1 + \frac{2p}{mE}\right) \doteq$$
$$\doteq c_0\left(1 - \frac{p}{E} + \frac{2p}{mE}\right) = c_0\left(1 + \frac{2-m}{mE}\,p\right)$$

Nový objem hranola je teda

$$V = abc = a_0 b_0 c_0 \left(1 + \frac{2-m}{mE}\,p\right)^3 \doteq V_0\left(1 + 3p\,\frac{2-m}{mE}\right)$$

Jeho zmena je:

$$\Delta V = V - V_0 = 3V_0\,\frac{2-m}{mE}\,p$$

takže pre koeficient stlačiteľnosti dostávame:

$$\varkappa = -\frac{1}{V_0}\,\frac{\Delta V}{p} = 3\,\frac{m-2}{mE} \tag{5}$$

Podľa skúsenosti tlak účinkujúci na všetky steny telesa vždy zmenšuje jeho objem čiže zmena objemu telesa ΔV vo vzorci (4) je vždy záporná, takže koeficient stlačiteľnosti je vždy kladný. Podľa toho aj čitateľ zlomku vo vzorci (5) je vždy kladný, čo znamená, že je $m > 2$. Pre $m = 2$ vzorec (5.3.9) dáva: $G = \dfrac{E}{3}$, pre $m = \infty$ je $G = \dfrac{E}{2}$. Všeobecne je teda

$$\frac{E}{3} < G < \frac{E}{2}$$

a

$$2G < E\ 3G$$

ako to dokazujú aj číselné údaje uvedené v *tabuľke 5.1*.

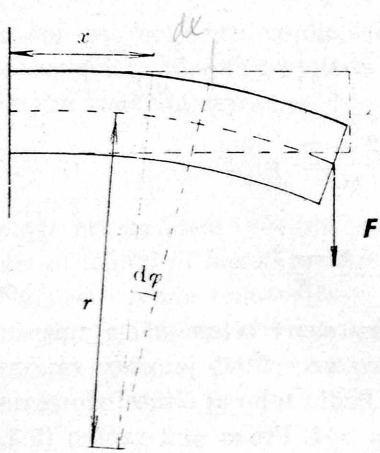
Tabuľka 5.1

Elastické konštanty niektorých látok

Materiál	Modul pružnosti v ťahu E v [kp cm^{-2}]	Poissonova konštanta m	Koeficient stlačiteľnosti [v cm^2 kp^{-1}]	Modul pružnosti v šmyku G [v kp cm^{-2}]
Hliník	$0{,}73 \cdot 10^6$	2,95	$1{,}3 \cdot 10^{-6}$	$0{,}27 \cdot 10^6$
Meď	$1{,}29 \cdot 10^6$	2,88	$0{,}7 \cdot 10^{-6}$	$0{,}46 \cdot 10^6$
Železo	$2{,}16 \cdot 10^6$	3,60	$0{,}62 \cdot 10^{-6}$	$0{,}81 \cdot 10^6$

Recipročná hodnota koeficientu stlačiteľnosti, $C = \dfrac{1}{\varkappa}$, volá sa *modul objemovej pružnosti.*

5.5. Ohyb pružnej laty. Veľmi častým prípadom namáhania pružného telesa je aj jeho namáhanie ohybom. Presvedčíme sa, že pri ohýbaní dosť dlhých tyčí alebo dosák sa, prakticky, upatňuje len ich modul pružnosti v ťahu, takže napríklad aj z ohnutia laty vhodných rozmerov možno určiť modul pružnosti v ťahu príslušného materiálu. Ale pretože jav ohnutia pružného telesa je dosť zložitý, pri odvodzovaní potrebných vzťahov použijeme aj niekoľko zjednodušujúcich predpokladov.



Obr. 5.12

Tyč dĺžky l a prierezu q nech je upevnená vo vodorovnej polohe do pevnej steny a na voľnom konci nech je zaťažená silou $\mathbf{F}$ *(obr. 5.12)*. K vlastnej tiaži tyče nebudeme najprv prihliadať. Prierez tyče nech je súmerný podľa zvislej osi súmernosti, aby nenastalo vybočenie tyče nabok. Účinkom sily $\mathbf{F}$ sa tyč prehne tak, že vlákna rovnobežné s osou tyče sa na vypuklej strane tyče predĺžia, v dutej sa skrátia. Prechod medzi nimi tvorí tzv. *neutrálne vlákno*, ktoré pri ohnutí nemení svojú dĺžku. Celkové ohnutie tyče vyšetríme berúc do úvahy časť tyče medzi dvoma blízkymi, v nezaťaženej tyči rovnobežnými rezmi vo vzdialenosti x a $x + \mathrm{d}x$ od upevneného konca. Oba rezy zvierajú po deformácii uhol $\mathrm{d}\varphi$ a pretínajú sa v strede krivosti neutrálneho vlákna, zakriveného do polomeru r, takže dĺžka neutrálneho vlákna pripadajúca na