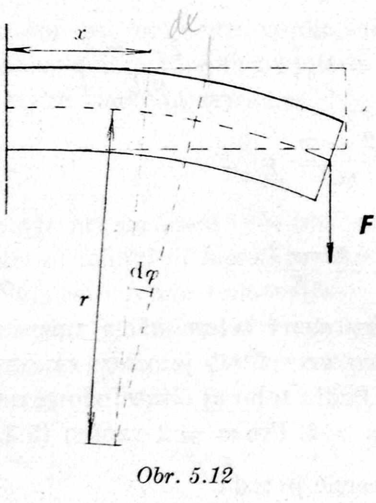
*Tabuľka 5.1*

**Elastické konštanty niektorých látok**

| Materiál | Modul pružnosti v ťahu $E$ v [kp cm$^{-2}$] | Poissonova konštanta $m$ | Koeficient stlačiteľnosti [v cm$^2$ kp$^{-1}$] | Modul pružnosti v šmyku $G$ [v kp cm$^{-2}$] |
|---|---|---|---|---|
| Hliník | $0{,}73 \cdot 10^6$ | 2,95 | $1{,}3 \cdot 10^{-6}$ | $0{,}27 \cdot 10^6$ |
| Meď | $1{,}29 \cdot 10^6$ | 2,88 | $0{,}7 \cdot 10^{-6}$ | $0{,}46 \cdot 10^6$ |
| Železo | $2{,}16 \cdot 10^6$ | 3,60 | $0{,}62 \cdot 10^{-6}$ | $0{,}81 \cdot 10^6$ |

Recipročná hodnota koeficientu stlačiteľnosti, $C = \frac{1}{\varkappa}$, volá sa *modul objemovej pružnosti.*

**5.5. Ohyb pružnej laty.** Veľmi častým prípadom namáhania pružného telesa je aj jeho namáhanie ohybom. Presvedčíme sa, že pri ohýbaní dosť dlhých tyčí alebo dosák sa, prakticky, upatňuje len ich modul pružnosti v ťahu, takže napríklad aj z ohnutia laty vhodných rozmerov možno určiť modul pružnosti v ťahu príslušného materiálu. Ale pretože jav ohnutia pružného telesa je dosť zložitý, pri odvodzovaní potrebných vzťahov použijeme aj niekoľko zjednodušujúcich predpokladov.



*Obr. 5.12*

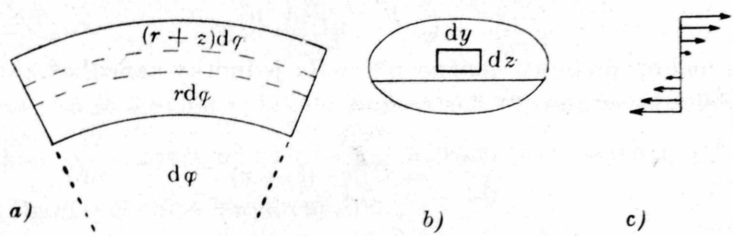
Tyč dĺžky $l$ a prierezu $q$ nech je upevnená vo vodorovnej polohe do pevnej steny a na voľnom konci nech je zaťažená silou $\mathbf{F}$ *(obr. 5.12).* K vlastnej tiaži tyče nebudeme najprv prihliadať. Prierez tyče nech je súmerný podľa zvislej osi súmernosti, aby nenastalo vybočenie tyče nabok. Účinkom sily $\mathbf{F}$ sa tyč prehne tak, že vlákna rovnobežné s osou tyče sa na vypuklej strane tyče predĺžia, v dutej sa skrátia. Prechod medzi nimi tvorí tzv. *neutrálne vlákno*, ktoré pri ohnutí nemení svoju dĺžku. Celkové ohnutie tyče vyšetríme berúc do úvahy časť tyče medzi dvoma blízkymi, v nezaťaženej tyči rovnobežnými rezmi vo vzdialenosti $x$ a $x + \mathrm{d}x$ od upevneného konca. Oba rezy zvierajú po deformácii uhol $\mathrm{d}\varphi$ a pretínajú sa v strede krivosti neutrálneho vlákna, zakriveného do polomeru $r$, takže dĺžka neutrálneho vlákna pripadajúca na vybranú časť tyče je $r\,\mathrm{d}\varphi$ *(obr. 5.13a)*. Ostatné vlákna sa predĺžia (skrátia) o $z\,\mathrm{d}\varphi$, ak $z$ meriame od neutrálneho vlákna.

Podľa vzorca (5.3.2) sila potrebná na pretiahnutie (pri $z < 0$ stlačenie) elementárnej trubice s prierezom $\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$ *(obr. 5.13b)* je:

$$\mathrm{d}f = E\,\frac{z\,\mathrm{d}\varphi}{r\,\mathrm{d}\varphi}\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}y$$

takže napätie $\sigma$ v mieste so súradnicou $z$ je:

$$\sigma = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z} = E\,\frac{z}{r} \tag{1}$$




*Obr. 5.13*

Tieto elementárne sily sú (prakticky) vodorovné *(obr. 5.13c)*. Pretože na časť tyče vpravo od rezu vo vzdialenosti $x$ pôsobia okrem týchto síl len sily zvislé a tyč je v pokoji, znamená to, že výslednica elementárnych síl v reze sa rovná nule:

$$f = \iint \mathrm{d}f = \frac{E}{r}\iint z\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}y = \frac{E}{r}\,S = 0$$

takže aj

$$S = \iint z\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}y = 0$$

$z$-ová súradnica ťažiska rezu vzhľadom na začiatok v mieste neutrálneho vlákna je:

$$z_0 = \frac{1}{q}\iint z\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}y = \frac{1}{q}\,S = 0$$

kde $q$ je plocha rezu, lebo $S = 0$. To znamená, že neutrálne vlákno prechádza cez ťažisko priečneho rezu tyče.

Otáčavý moment elementárnych síl v reze je:

$$D = \iint z\,\mathrm{d}f = \frac{E}{r}\iint z^2\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}y = \frac{E}{r}\,J \tag{2}$$

kde $J = \iint z^2\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}y$ je tzv. *plošný moment zotrvačnosti* prierezu $q$ vzhľadom na ohybovú os, t. j. priamku rovnobežnú s osou $Y$ a prechádzajúcu cez ťažisko rezu. Moment tejto dvojice sa rovná momentu sily pôsobiacej na konci tyče vzhľadom na uvažovaný rez. Ak predpokladáme malý prehyb, môžeme teda písať rovnicu

$$\frac{EJ}{r} = F(l - x) \tag{3}$$

Rovnicu ohnutého neutrálneho vlákna môžeme si myslieť napísanú v tvare $p = f(x)$, kde $p$ je zníženie vlákna v bode $x$. Polomer krivosti neutrálneho vlákna prehnutej tyče potom je:

$$r = \frac{(1 + p'^2)^{\frac{3}{2}}}{p''} \doteq \frac{1}{p''}$$

pretože pri malom prehnutí možno $p'^2$ vedľa jednotky zanedbať.

Po dosadení do vzťahu (3) dostávame:

$$\frac{d^2p}{dx^2} = \frac{F}{EJ}(l - x)$$

a integráciou

$$\frac{dp}{dx} = \frac{F}{EJ}\left(lx - \frac{x^2}{2}\right) \tag{4}$$

lebo pre $x = 0$ je aj $\frac{dp}{dx} = 0$, takže integračná konštanta sa rovná nule.

Ďalšou integráciou rovnice (4) dostávame:

$$p = \frac{F}{EJ}\left(\frac{lx^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right) \tag{5}$$

lebo integračná konštanta, znamenajúca zníženie pre $x = 0$, sa opäť rovná nule.

Pre koniec tyče ($x = l$) z rovníc (4) a (5) dostávame:

$$\frac{dp}{dx} = \operatorname{tg} \alpha \doteq \alpha = \frac{Fl^2}{2EJ} \tag{6}$$

$$p = \frac{Fl^3}{3EJ} \tag{7}$$

Ale keby tyč hmotnosti $M$ bola prehnutá len vlastnou tiažou, rovnica (3) by bola:

$$\frac{EJ}{r} = Mg\,\frac{l - x}{l} \cdot \frac{l - x}{2} = Mg\,\frac{(l - x)^2}{2l}$$

takže vo všeobecnosti je táto rovnica

$$\frac{EJ}{r} = F(l - x) + Mg\,\frac{(l - x)^2}{2l}$$

a príslušné výsledky sú zložitejšie.

V prípade, že prierez je pravouholník so šírkou $a$ a výškou $v$, plošný moment zotrvačnosti prierezu vzhľadom na vodorovnú os ťažiskom rezu idúcu je:

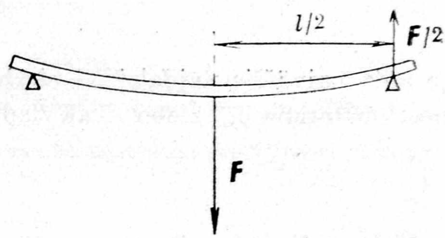
$$J = \frac{1}{12}av^3$$

takže odvodené vzorce dostávajú tvar

$$\alpha = \frac{6Fl^2}{Eav^3}, \qquad p = \frac{4Fl^3}{Eav^3}$$

Podľa vzorca (5.3.8) len vplyvom šmyku by koniec tyče bol znížený o dĺžku $p^* = \frac{\tau}{G}l = \frac{Fl}{Gav}$, takže $p^* : p = \frac{Ev^2}{4Gl^2}$ a keďže pri tyčiach je $l \gg v$, vidíme, že pri ohýbaní tyčí vplyv šmyku možno zanedbať.

Prakticky modul pružnosti $E$ meriame určovaním sklonu konca laty alebo zníženia jej stredu, keď lata je podopretá na oboch koncoch a zaťažená v prostriedku silou **F** *(obr. 5.14)*. Účinok sily **F**, pôsobiacej v strede je ten istý, aký by vyvolali sily opačného smeru a veľkosti $\frac{F}{2}$ na dvoch koncoch tyče, keby bola tyč upevnená v prostriedku.



*Obr. 5.14*

Preto

$$\alpha = \frac{6\,\frac{F}{2}\left(\frac{l}{2}\right)^2}{Eav^3} = \frac{3}{4}\,\frac{Fl^2}{Eav^3}$$

a

$$p = \frac{4\,\frac{F}{2}\left(\frac{l}{2}\right)^3}{Eav^3} = \frac{Fl^3}{4Eav^3}$$

z čoho pre modul pružnosti v ťahu vychádza:

$$E = \frac{l^3}{4av^3}\cdot\frac{F}{p}$$

alebo

$$E = \frac{3}{4} \frac{l^2}{av^3} \cdot \frac{F}{\alpha}$$

pričom uhol $\alpha$ môžeme presne zmerať pomocou zrkadlovej metódy.

**5.6. Pevnosť v ohybe.** Podľa vzorca (5.5.2) na ohnutie tyče, pri ktorom polomer zakrivenia neutrálneho vlákna tyče je $r$, potrebný ohybový moment $D = \frac{E}{r} J$. Polomer krivosti $r$ v tomto vzorci môžeme vyjadriť pomocou vzorca (5.5.1), $r = E \frac{z}{\sigma}$, takže je aj

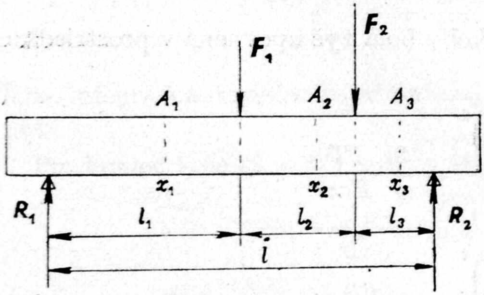
$$D = \frac{\sigma}{z} J \tag{1}$$

kde $J$ je plošný moment zotrvačnosti rezu vzhľadom na ohybovú os a $\sigma$ normálové napätie v mieste vo vzdialenosti $z$ od neutrálneho vlákna. Toto napätie,

$$\sigma = z \frac{D}{J} \tag{2}$$

je teda najväčšie najďalej od ohybovej osi a nesmie prekročiť hranicu pevnosti materiálu $\sigma_m$, alebo — ak žiadaný koeficient bezpečnosti je $k$ — hodnotu $\frac{\sigma_m}{k}$.

**Úloha 1.** Hranol so štvorcovým prierezom je namáhaný podľa *obr. 5.15*. Aké veľké majú byť priečne rozmery hranola, keď hranica pevnosti materiálu v ťahu je $\sigma_m = 2\,500$ kp cm$^{-2}$ a žiadaný koeficient bezpečnosti $k = 5$?




*Obr. 5.15*

Riešenie: Vyšetríme najprv namáhania hranola v priečnych rezoch medzi jednotlivými vonkajšími silami. Vzhľadom na každý rez sily pôsobiace vľavo od tohto rezu a sily pôsobiace vpravo sú vo vzájomnej rovnováhe. Preto namáhanie hranola v jeho ľubovoľnom reze nájdeme, ak napríklad všetky sily pôsobiace vpravo od tohto rezu preložíme do tohto rezu a pridáme príslušné dvojice. Podľa toho v reze $A_1$ účinkuje priečna sila, ktorá hranol namáha šmykom, $S_1 = R_2 - F_1 - F_2 = -R_1$, keďže súčet všetkých síl sa rovná nule, a dvojica s momentom $D_1 = (l_1 + l_2 + l_3 - x_1) R_2 - (l_1 + l_2 - x_1) F_2 - (l_1 - x_1) F_1$; v reze $A_2$ priečna sila $S_2 = R_2 - F_2$ a dvojica s momentom $D_2 = (l_1 + l_2 + l_3 - x_2) R_2 - (l_1 + l_2 - x_2) F_2$; v reze $A_3$ priečna sila $S_3 = R_2$ a dvojica