

ale majú opačné smery. Podľa prvej vety impulzovej sú preto aj absolútne hodnoty nimi vyvolaných zmien hybností obidvoch telies rovnaké a aj tieto zmeny ako vektory majú opačné smery.

Ak je $\mathbf{N}$ nárazová sila a t_0 obyčajne veľmi krátky čas trvania jej účinku, je jej impulz

$$\mathbf{I} = \int_0^{t_0} \mathbf{N} dt$$

alebo, ak zavedieme strednú hodnotu nárazovej sily vzorcom $\mathbf{N}_s = \frac{1}{t_0} \int_0^{t_0} \mathbf{N} dt$,

$$\mathbf{I} = \mathbf{N}_s t_0$$

takže je tiež

$$N_s = \frac{I}{t_0} \quad (1)$$

Impulz sily však sa rovná spôsobenej zmene hybnosti. Pretože pri zrážke dvoch telies zmeny ich hybnosti bývajú veľké, podľa vzorca (1) aj nárazové sily sú veľké, a to tým väčšie, čím kratší je čas trvania dotyku, t. j. čím tvrdšie sú telesá, ktoré sa zrazili. Okrem toho nárazová sila pri zrážke rastie od nuly až po svoju najväčšiu hodnotu, aby potom opäť klesla na nulu. Z toho vyplýva, že maximálne hodnoty nárazových síl sú ešte väčšie ako ich stredné hodnoty, takže pri zrážke dvoch tvrdých telies často sa telesá rozbiť. V dôsledku pomerne veľmi veľkých hodnôt nárazových síl súčasný účinok prípadných iných vonkajších síl pôsobiacich na telesá je zanedbateľne malý.

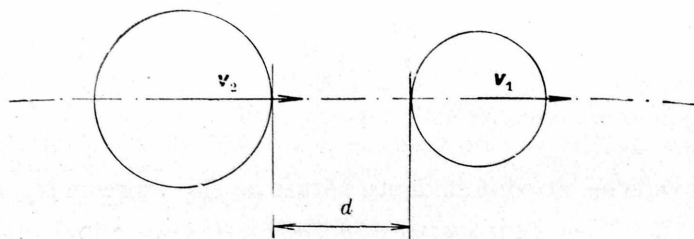
Keď sa body obidvoch telies, ktoré sa pri zrážke stali dotykovými bodmi, bezprostredne pred zrážkou pohybovali rovnobežne so spoločnou normálou k povrchu obidvoch telies v spoločnom dotykovom bode, zraz telies sa volá *priamy*, inakšie je *šikmý*. Keď táto normála prechádza cez ťažiská obidvoch telies, zraz sa volá *centrálny*, inakšie je *excentrický*.

Vo všeobecnosti sily pôsobiace pri zrážke pružných telies sú zapríčinené ich deformáciou aj trením.

Budeme sa zaoberať len zrážkami pružných a nepružných gúľ, ktoré — ako to z definície vyplýva — sú vždy centrálné.

5.9. Zraz pružných a nepružných gúľ. Priamy zraz dokonale pružných gúľ. Stredy dvoch homogénnych a dokonale pružných gúľ s hmotnosťou m_1 a m_2 nech sa pohybujú rovnobežne so svojou spojnicou rýchlosťami $\mathbf{v}_1$ a $\mathbf{v}_2$. Keď $\mathbf{r}_1$ a $\mathbf{r}_2$ sú polohové vektory stredov gúľ, podmienkou zrážky je zrejme, aby vektory $\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1$ a $\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ boli súhlasne rovnobežné, ako je to

napríklad v prípade gúľ znázornených na obr. 5.16. Vypočítame rýchlosti týchto dvoch gúľ po zrážke, pričom budeme predpokladať, že sa gule pred zrážkou pohybovali translačne, aby za dotyku nevzniklo trenie.



Obr. 5.16

Pri guliach znázornených na obr. 5.16, len čo sa gule dotknú, pomalšia predná guľa začne prekážať v pohybe rýchlejšej zadnej guli a obidve gule začnú na seba pôsobiť silami $\pm \mathbf{N}$. Zadná guľa zrýchľuje prednú guľu silou $\mathbf{N}$, a táto spomaľuje pohyb zadnej gule silou $-\mathbf{N}$. Obidve gule sa splošťujú v mieste dotyku a ich stredy sa najprv ešte ďalej k sebe približujú. Po istom čase sú rýchlosti obidvoch gúľ rovnaké, $\mathbf{v}$, a deformácie obidvoch gúľ najväčšie. Tento okamih ukončuje *prvé obdobie zrážky*. Pretože na gule neúčinkujú nijaké vonkajšie sily, alebo — ak účinkujú — sú vzhľadom na nárazové sily $\pm \mathbf{N}$ zanedbateľne malé, podľa zákona o zachovaní hybnosti pre rýchlosť $\mathbf{v}$ platí:

$$m_1 \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{v}_2 = (m_1 + m_2) \mathbf{v}$$

$$\mathbf{v} = \frac{m_1 \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{v}_2}{m_1 + m_2} \quad (1)$$

V okamihu, keď sa rýchlosti obidvoch gúľ vyrovnajú na spoločnú rýchlosť $\mathbf{v}$, gule sú práve najviac deformované. Preto sú nárazové sily $\pm \mathbf{N}$ v tomto okamihu najväčšie a účinkujú ešte tak dlho ďalej, kým deformácie gúľ nezmlznú. V tomto *druhom období zrážky* sa rýchlosť prednej gule ďalej zväčšuje a rýchlosť zadnej gule znižuje tak dlho, až sa gule prestanú dotýkať a zrážka sa skončí. Pretože pri dokonale pružných guliach časový priebeh veľkosti nárazových síl vzhľadom na okamih najväčšej deformácie je symetrický, v druhom období zrážky zmenia sa hybnosti, a preto aj rýchlosti obidvoch gúľ, rovnako ako v prvom období. Pre rýchlosti stredov gúľ po zrážke preto platí:

$$\mathbf{v}'_1 = \mathbf{v}_1 + 2(\mathbf{v} - \mathbf{v}_1) = 2\mathbf{v} - \mathbf{v}_1$$

$$\mathbf{v}'_2 = \mathbf{v}_2 + 2(\mathbf{v} - \mathbf{v}_2) = 2\mathbf{v} - \mathbf{v}_2$$

alebo, vzhľadom na vzorec (1),

$$\begin{aligned} \mathbf{v}'_1 &= \frac{(m_1 - m_2) \mathbf{v}_1 + 2m_2 \mathbf{v}_2}{m_1 + m_2} \\ \mathbf{v}'_2 &= \frac{(m_2 - m_1) \mathbf{v}_2 + 2m_1 \mathbf{v}_1}{m_1 + m_2} \end{aligned} \quad (2)$$

Podľa týchto vzorcov pri priamej zrážke dvoch pružných gúl nastáva zmena smeru ich relatívnej rýchlosti pri zachovaní jej hodnoty,

$$\mathbf{v}'_1 - \mathbf{v}'_2 = -(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2) \quad (3)$$

ako sa ľahko môžeme presvedčiť vykonaním potrebného jednoduchého výpočtu.

Pri zrážke dokonale pružných telies nedochádza k trvalej zmene ich celkovej pohybovej energie. Vzorec (2) s použitím zákona o zachovaní energie a zákona o zachovaní hybnosti možno odvodiť aj bez počítania spoločnej rýchlosti $\mathbf{v}$ gúl v okamihu ich najväčšej deformácie. Pre výpočet veľkostí rýchlostí $\mathbf{v}'_1$ a $\mathbf{v}'_2$, vzťahujúcich sa na jednotkový vektor so spoločnou priamkou rýchlostí $\mathbf{v}_1$ a $\mathbf{v}_2$ rovnobežný, tieto zákony poskytujú rovnice

$$\begin{aligned} m_1 v_1'^2 + m_2 v_2'^2 &= m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2 \\ m_1 v_1' + m_2 v_2' &= m_1 v_1 + m_2 v_2 \end{aligned}$$

Ak tieto rovnice upravíme na tvar

$$\begin{aligned} m_1(v_1'^2 - v_1^2) &= m_2(v_2^2 - v_2'^2) \\ m_1(v_1' - v_1) &= m_2(v_2 - v_2') \end{aligned}$$

rozdelením prvej rovnice rovnicou druhou dostávame rovnicu

$$v_1' + v_1 = v_2 + v_2'$$

ktorá spolu s rovnicou

$$m_1(v_1' - v_1) = m_2(v_2 - v_2')$$

umožňuje už ľahký výpočet rýchlostí v_1' a v_2' .

Podľa vzorcov (2) ak je $m_1 = m_2$, potom $\mathbf{v}'_1 = \mathbf{v}_2$ a $\mathbf{v}'_2 = \mathbf{v}_1$, čiže gule si vymenia rýchlosti. Ak guľa s hmotnosťou m_2 narazí na pružnú a pevnú stenu, jej rýchlosť po odraze dostaneme z druhého zo vzorcov (2), ak v ňom hmotnosť m_2 popri hmotnosti m_1 zanedbáme, a súčasne píšeme: $\mathbf{v}_1 = 0$. Vychádza: $\mathbf{v}'_2 = -\mathbf{v}_2$.

Priamy zraz dokonale nepružných gúl. Telesá z látok dokonale nepružných sa za účinku vonkajších síl deformujú tak, že ich deformácia práve tak ako deformácia telies pružných sa s rastúcimi silami tiež zväčšuje, avšak —

na rozdiel od telies pružných — táto deformácia je trvalá a nezmenšuje sa, keď vonkajšie sily miznú. Z toho vyplýva, že prvé obdobie zrážky nepružných gúľ prebieha rovnako ako pri zrážke gúľ pružných. Na konci tohto obdobia sa obidve gule pohybujú rovnakou rýchlosťou danou vzorcom (1) a deformácia aj nárazové sily sú v tomto okamihu najväčšie.

Pôsobením týchto nárazových síl by malo nastať druhé obdobie zrážky, v ktorom by sa stredy gúľ od seba opäť vzdalovali. Ale pretože deformácia nepružných gúľ ostáva nezmenená, nárazové sily po dosiahnutí svojej najväčšej hodnoty klesnú okamžite na nulu a obidve gule sa pohybujú ďalej rovnakou rýchlosťou

$$\mathbf{v} = \frac{m_1 \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{v}_2}{m_1 + m_2}$$

ako keby tvorili jedno teleso.

Trvalá deformácia nepružných gúľ pri ich zrážke má za následok pokles ich celkovej pohybovej energie o hodnotu

$$-\Delta K = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 - \frac{1}{2} (m_1 + m_2) v^2 = \frac{m_1 m_2 (v_1 - v_2)^2}{2(m_1 + m_2)} \quad (4)$$

5.10. Balistické kyvadlo. Balistickým kyvadlom sa merajú rýchlosti striel. Je to fyzikálne kyvadlo, ktorého dolná časť je z mäkkého a nepružného materiálu. Strela s hmotnosťou m vystrelená vo vodorovnom smere proti balistickému kyvadlu uviazne v mäkkej časti kyvadla a odovzdá mu časť svojej hybnosti. Tým sa kyvadlo vychýli o istý uhol φ , ktorý je tým väčší, čím väčšia bola rýchlosť strely zachytenej kyvadlom. Odvodíme príslušné vzťahy.

Strela nech má hmotnosť m , rýchlosť v a kolmá vzdialenosť priamky tejto rýchlosti od osi kyvadla nech je r . Pri zrážke strely s kyvadlom jedinou vonkajšou silou účinkujúcou na sústavu kyvadlo—strela je reakcia osi kyvadla. Pre túto príčinu pri náraze strely na kyvadlo celkový moment hybnosti tejto sústavy vzhľadom na os kyvadla ostáva nezmenený, čiže je:

$$mrv = (J_0 + mr'^2) \omega$$

kde J_0 je moment zotrvačnosti kyvadla, r' vzdialenosť zachytenej strely od jeho osi a ω uhlová rýchlosť kyvadla po náraze. Predpokladajme, že $r' = r$. V tom prípade

$$\omega = \frac{mrv}{J_0 + mr^2}$$

Hľadanú maximálnu uhlovú výchylku kyvadla po zachytení strely vypočít-