Pri veľkých tlakoch je stlačiteľnosť kvapalín menšia. Napríklad stlačiteľnosť vody pri 500 at je 39, pri 1 000 at 33 a pri 2 500 at 9 . $10^{-6}$ cm²/kp. S rastúcou teplotou sa stlačiteľnosť kvapalín obyčajne zväčšuje.

Kvapalinu nazývame *ideálnou*, keď okrem všeobecne platnej vlastnosti $G_s = 0$ je aj 1. nestlačiteľná ($\varkappa = 0$) a 2. niet v nej vnútorného trenia ($\eta = 0$).

**7.2. Základné rovnice hydrostatiky.** Pre svoju tvarovú nestálosť kvapalina, ktorá sa nepohybuje, môže účinkovať na stenu nádoby, alebo aj na akúkoľvek hoci len myslenú rovinnú plôšku len kolmou silou. Veľkosť tejto sily prepočítaná na plošnú jednotku sa volá *hydrostatický tlak*. Tvarová nestálosť kvapaliny spôsobuje aj to, že tlak vo zvolenom bode vo vnútri kvapaliny je vo všetkých smeroch rovnaký, inými slovami — ako sa o tom môžeme presvedčiť aj pokusom — sila účinkujúca v kvapaline na plošnú jednotku nezávisí od smeru jej normály. Na elementárnu plôšku s absolútnou hodnotou d$S$, ktorej sme priradili plošný vektor d$\mathbf{S}$, v mieste, kde tlak v kvapaline je $p$, zo strany orientácie plôšky účinkuje teda sila $-p\,\mathrm{d}\mathbf{S}$.

Predstavme si, že v kvapaline bez vnútorného trenia je plocha, ktorá je v sebe uzavretá; jej vnútro nech má objem $\tau$. Na kvapalinu, ktorá je v tomto objeme, účinkuje jednak *objemová sila*, napr. jej tiaž, jednak *plošná sila*, tlak okolnej kvapaliny. Keď merná hmotnosť kvapaliny je $s$, tiaž objemovej jednotky je $s\mathbf{g}$, kde $\mathbf{g}$ je zrýchlenie voľného pádu. Tiaž kvapaliny v objeme $\tau$ je teda $\mathbf{F}_1 = \int s\mathbf{g}\,\mathrm{d}\tau$. Za tlaku $p$ vo vnútri kvapaliny na povrchový plošný element d$S$ účinkuje z vonkajšej strany sila $-p\,\mathrm{d}\mathbf{S}$. Na celý objem $\tau$ účinkuje teda plošná sila $\mathbf{F}_2 = -\oint p\,\mathrm{d}\mathbf{S}$.

Aby sme mohli upraviť tento plošný integrál pomocou Gaussovej vety, budeme upravovať jeho skalárny súčin s ľubovoľným konštantným vektorom $\mathbf{a}$.

$$\mathbf{a}\,.\oint p\,\mathrm{d}\mathbf{S} = \oint p\mathbf{a}\,.\,\mathrm{d}\mathbf{S} = \int \mathrm{div}\,(p\mathbf{a})\,\mathrm{d}\tau = \int \nabla\,.\,(p\mathbf{a})\,\mathrm{d}\tau = \int (\mathrm{grad}\,p)\,\mathrm{d}\tau\,.\,\mathbf{a}$$

a teda

$$\mathbf{F}_2 = -\oint p\,\mathrm{d}\mathbf{S} = -\int (\mathrm{grad}\,p)\,\mathrm{d}\tau$$

Podľa zákonov mechaniky súčet obidvoch síl $\mathbf{F}_1$ a $\mathbf{F}_2$ sa rovná súčinu hmotnosti kvapaliny v objeme $\tau$ a zrýchlenia $\mathbf{a}$ jej ťažiska, teda

$$\int s\mathbf{g}\,\mathrm{d}\tau - \int (\mathrm{grad}\,p)\,\mathrm{d}\tau = \int s\mathbf{a}\,\mathrm{d}\tau$$

alebo, keďže integračný rozsah bol zvolený ľubovoľne,

$$\mathbf{g} - \frac{1}{s}\,\mathrm{grad}\,p = \mathbf{a} \tag{1}$$

Zrýchlenie $\mathbf{g}$, totožné s intenzitou silového poľa zemského, rovná sa však zápornému gradientu potenciálu tohto poľa, $\mathbf{g} = -\text{grad}\ V$, a ak je kvapalina v pokoji, vtedy $\mathbf{a} = 0$. Pre nestlačiteľnú kvapalinu ($s = \text{const}$), ktorá sa nepohybuje, preto platí

$$-\text{grad}\ V - \text{grad}\left(\frac{p}{s}\right) = 0$$

$$\text{grad}\left(V + \frac{p}{s}\right) = 0$$

z čoho vyplýva, že v nestlačiteľnej kvapaline, ktorá sa nepohybuje,

$$sV + p = \text{const} \tag{2}$$

slovami: *Za stavu pokoja v nestlačiteľnej kvapaline je súčet potenciálnej energie jej objemovej jednotky a tlaku všade rovnaký.*

Rovnica (2) je základnou rovnicou hydrostatiky nestlačiteľnej kvapaliny a vyjadruje súčasne podmienku jej rovnováhy. Z jej odvodenia vyplýva, že je správna nielen vtedy, ak objemovou silou účinkujúcou na kvapalinu je práve jej váha, ale vo všetkých prípadoch, keď intenzitu príslušného silového poľa možno napísať v tvare gradientu. Takouto silou je napríklad sila odstredivá.

Za predpokladu, že merná hmotnosť kvapaliny alebo plynu závisí len od tlaku, možno rovnici (2) podobnú rovnicu odvodiť aj pre stlačiteľné tekutiny, teda aj pre plyny, takto: Rovnica (1) je správna nezávisle od stlačiteľnosti tekutiny a zrýchlenie voľného pádu telies $\mathbf{g}$ môžeme v nej nahradiť intenzitou $\mathbf{E}$ ľubovoľného silového poľa, ktorú v prípade gravitačného a jemu podobných polí môžeme písať ako záporný gradient potenciálu, $\mathbf{E} = -\text{grad}\ V$. Tým sa rovnica (1) pre pokojový stav tekutín upravuje na tvar

$$\text{grad}\ V + \frac{1}{s}\,\text{grad}\ p = 0 \tag{3}$$

Keď však merná hmotnosť tekutiny $s$, a preto aj jej recipročná hodnota $\frac{1}{s}$, závisia len od tlaku tekutiny, môžeme zaviesť funkciu $\Phi(p) = \int \frac{1}{s}\,\mathrm{d}p$, ktorej gradient je:

$$\text{grad}\ \Phi(p) = \frac{\mathrm{d}\Phi(p)}{\mathrm{d}p}\,\text{grad}\ p = \frac{1}{s}\,\text{grad}\ p \tag{4}$$

Tento výsledok nám umožňuje prepísať rovnicu (3) do tvaru

$$\text{grad}\ V + \text{grad}\ \Phi(p) = 0$$

Z tejto rovnice vyplýva, že pri stlačiteľných tekutinách, ak ich merná hmotnosť závisí len od tlaku (a nie napríklad aj od teploty), je:

$$V + \Phi(p) = \text{const} \tag{5}$$

kde $\Phi(p) = \int \frac{1}{s} \mathrm{d}p$ a $V$ je potenciál silového poľa, v ktorom sa tekutina nachádza.

Z rovníc (1) až (5) vyplýva rad ich dôležitých a zväčša všeobecne známych dôsledkov. Odvodíme, alebo pripomenieme aspoň tie najvýznamnejšie.

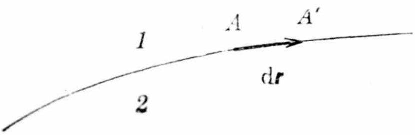
Predstavme si, že sa v nejakej nádobe nachádzajú v pokoji súčasne dve kvapaliny alebo kvapalina a plyn, ktoré sa navzájom nerozpúšťajú. Sú preto od seba oddelené rozhraním. V tomto rozhraní si zvoľme dva blízke body $A$ a $A'$, ktorých polohové vektory nech sa líšia o d$\boldsymbol{r}$ *(obr. 7.4)*. Rovnica (3) je splnená v tekutinách po obidvoch stranách rozhrania. Preto ak v bode $A$ je tlak $p$, pre jeho zmenu d$p$ pri prechode do bodu $A'$ platí súčasne

$$\mathrm{d}p = \mathrm{d}\boldsymbol{r} \,.\, \text{grad}\, p = \mathrm{d}\boldsymbol{r} \,.\, (-s_1 \,\text{grad}\, V) = \mathrm{d}\boldsymbol{r} \,.\, (-s_2 \,\text{grad}\, V)$$

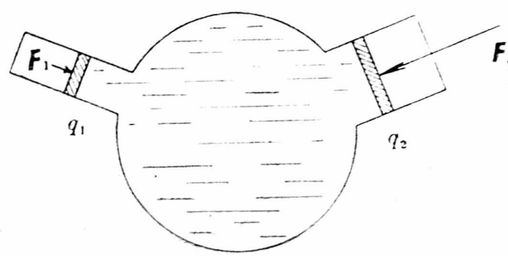
Je preto správna aj rovnica

$$\mathrm{d}\boldsymbol{r} \,.\, (s_2 - s_1)\, \text{grad}\, V = 0$$

z ktorej — za predpokladu, že merné hmotnosti $s_1$ a $s_2$ nie sú rovnaké — vyplýva, že vektor grad $V$ je na rozhranie kolmý. Inými slovami: *Za rovnováhy je rozhranie dvoch tekutín*, a to bez ohľadu na ich stlačiteľnosť, *ekvipotenciálnou hladinou.*




*Obr. 7.4*




*Obr. 7.5*

Keď sa teda kvapalina, ktorá sa nepohybuje, v silovom poli zemskom stýka s plynom, napríklad s ovzduším, alebo v uzavretej nádobe so svojou vlastnou parou, jej tzv. *vodorovná hladina* je fyzikálnou realizáciou časti povrchu *geoidu.* Ak hladina kvapaliny nie je príliš rozsiahla, je to časť vodorovnej roviny.

Keď je kvapalina pod väčším tlakom a nevypĺňuje príliš rozsiahly priestor, v rovnici (2) člen $sV$ možno vedľa tlaku $p$ zanedbať, čím sa rovnica (2) zjednodušuje na rovnicu

$$p = \text{const} \tag{6}$$

ktorá je vyjadrením *Pascalovho zákona* o rovnomernom šírení sa tlaku v kvapalinách.

Z rovnice (6) bezprostredne vyplýva silový prevod pri hydraulických lisoch. Podľa *obr. 7.5* a rovnice (6) sily $F_1$ a $F_2$ za rovnováhy musia byť $F_1 = pq_1$, $F_2 = qp_2$, takže ich pomer je $F_1 : F_2 = q_1 : q_2$, ak $q_1$ a $q_2$ sú veľkosti povrchov obidvoch piestov.

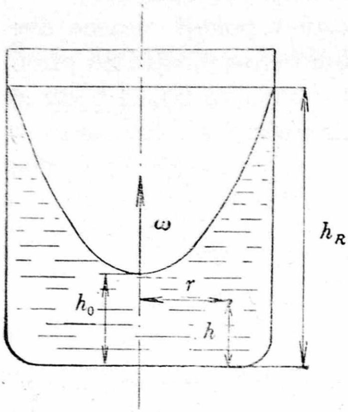
Ak objemovou silou účinkujúcou na kvapalinu je len jej tiaž, v rovnici (2) vystupujúcu potenciálnu energiu objemovej jednotky môžeme vzťahovať na vodorovnú hladinu kvapaliny v pokoji. V hĺbke $h$ pod hladinou nestlačiteľnej kvapaliny je potom $sV = -sgh$ a pre tlak v tejto hĺbke vychádza

$$p = \text{const} + sgh = b + sgh \tag{7}$$

kde $b$ je tlak (napríklad barometrický) pri hladine kvapaliny. Na vodorovné dno otvorenej nádoby, v ktorej je toľko kvapaliny, že jej hladina je vo výške $h$ nad dnom, účinkuje teda sila (tlaková)

$$F = Sp = Sb + Ssgh$$

ktorej veľkosť nie je závislá od množstva kvapaliny *(hydrostatické paradoxon)*.



*Obr. 7.6*

**Príklad 1.** Valcovitá nádoba s vnútorným polomerom $R$ obsahuje toľko kvapaliny, že jej vodorovná hladina je vo výške $h'$ nad dnom. Keď nádobu roztočíme okolo jej zvislej osi, pôsobením vnútorného trenia roztočí sa aj kvapalina v nej prítomná, na ktorú potom okrem jej tiaže účinkuje aj odstredivá sila. Pôvodná vodorovná hladina kvapaliny sa preto prehne do tvaru výslednej ekvipotenciálnej hladiny tiaže a odstredivej sily *(obr. 7.6)*.

Ak $h$ znamená výšku napríklad nad dnom nádoby, potenciál tiaže je $V_1 = gh$. Pre potenciál odstredivej sily intenzity $\mathbf{E}_2 = \omega^2 \mathbf{r}$ dostávame

$$V_2 = -\int_0^r \mathbf{E}_2 \,.\, \mathrm{d}\mathbf{r} = -\int_0^r \omega^2 \mathbf{r} \,.\, \mathrm{d}\mathbf{r} = -\int_0^r \omega^2 r \,\mathrm{d}r = -\frac{1}{2}\,\omega^2 r^2$$

Potenciál výsledného silového poľa je preto $V = V_1 + V_2 = gh - \frac{1}{2}\,\omega^2 r^2$, takže rovnica povrchu kvapaliny vo valci, ktorý sme roztočili okolo jeho zvislej osi, je $gh - \frac{1}{2}\,\omega^2 r^2 = C$, alebo

$$h = \frac{\omega^2}{2g}\, r^2 + h_0$$

kde $h_0$ je zrejme výška hladiny v osi valca.

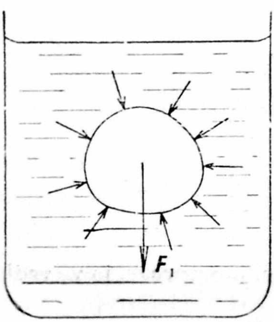
Podľa tohto výsledku povrch hladiny je prehnutý do tvaru rotačného paraboloidu a rozdiel výšok hladín na okraji a v strede valca je $h_R - h_0 = \frac{\omega^2}{2g} R^2$. Na využití tohto rozdielu spočíva princíp jedného druhu otáčkomerov upotrebiteľných pre strojové časti otáčajúce sa okolo zvislých osí.

Vyšetríme ešte rozdelenie tlaku v kvapaline. Podľa rovnice (2) tlaky $p_1$ a $p_2$ v ľubovoľných dvoch bodoch kvapaliny spĺňajú rovnicu $p_1 + sgh_1 - \frac{1}{2} s\omega^2 r_1^2 = p_2 + sgh_2 - \frac{1}{2} s\omega^2 r_2^2$. Ak za bod *2* si zvolíme bod, v ktorom os valca pretína povrch kvapaliny, a veličiny vzťahujúce sa na ľubovoľný bod prvý budeme už písať bez indexu, pre tlak $p$ dostávame:

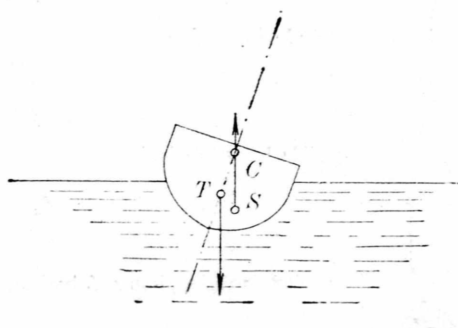
$$p = b + sg(h_0 - h) + \frac{1}{2} s\omega^2 r^2$$

kde $b$ je tlak plynu alebo pary nad hladinou kvapaliny.

Už pri odvodzovaní rovníc (1) a (2) sme si uvedomili, že objemová sila $\boldsymbol{F}_1$ pôsobiaca na ľubovoľnú časť tekutiny, ktorá sa nepohybuje, a plošná sila $\boldsymbol{F}_2$ sú vo vzájomnej rovnováhe. Ak časť tekutiny, na ktorú účinkuje objemová sila $\boldsymbol{F}_1$, nahradíme iným telesom *(obr. 7.7)*, celková plošná sila ostane nezmenená. Preto sa aj potom $\boldsymbol{F}_2$ bude rovnať $-\boldsymbol{F}_1$, pričom $\boldsymbol{F}_1$ je stále objemová sila,




*Obr. 7.7*




*Obf. 7.8*

ktorá účinkovala na odstránenú tekutinu. Preto, keď objemovou silou účinkujúcou na tekutinu je len jej tiaž, je splnený *Archimedov zákon*, ktorý hovorí, že: *teleso ponorené do tekutiny je nadľahčované silou rovnajúcou sa tiaži tekutiny telesom nahradenej*.

Ak táto nadľahčujúca sila *(vztlak)* je väčšia než tiaž telesa, voľné teleso sa vynorí na povrch kvapaliny a pláva na povrchu tak, že jeho tiaž sa rovná práve tiaži ním nahradenej kvapaliny. Na tomto vzťahu sú založené areometre, slúžiace na meranie hustôt kvapalín.

Na teleso, ktoré pláva na povrchu kvapaliny, účinkujú teda v tej istej priamke (v osi plávania) dve sily rovnakých absolútnych hodnôt a opačných smerov: *tiaž telesa*, ktorej pôsobiskom je ťažisko telesa, a *vztlak*, účinkujúci v ťažisku kvapaliny telesom vytláčanej.

O stabilite plávania rozhoduje poloha tzv. *metacentra* $C$, priesečníka priamky vztlaku a osi plávania po jej vychýlení zo zvislej polohy *(obr. 7.8)*. Podmienkou stability plávania je zrejme, aby sa metacentrum nachádzalo nad ťažiskom plávajúceho telesa. Na lodiach býva výška metacentra vzťahujúceho sa na výkyvy okolo pozdĺžnej osi lode 50 až 100 cm nad ťažiskom $T$.

**Úloha 1.** Areometer bol zhotovený na meranie merných hmotností kvapalín ťažších ako voda. Miesto na jeho mernej rúrke, po ktoré sa areometer ponorí v kvapaline s mernou hmotnosťou $s_m$, je o dĺžku $d$ nižšie ako miesto zodpovedajúce mernej hmotnosti vody $s_0 = 1\ \mathrm{g/cm^3}$ *(obr. 7.9)*. Treba zhotoviť príslušnú stupnicu.

Riešenie: Nech je hmotnosť areometra $M$, jeho objem až po značku $s_m$ nech je $V_0$ a prierez mernej rúrky $q$. Ak je areometer postupne ponorený do vody, kvapaliny s mernou hmotnosťou $s_m$ a s mernou hmotnosťou $s$, sú splnené rovnice:


Obr. 7.9

$$Mg = (V_0 + qd)\, s_0 g$$

$$Mg = V_0 s_m g$$

$$Mg = (V_0 + qh)\, sg$$

a teda i rovnice:

$$(V_0 + qd)\, s_0 = V_0 s_m$$

$$(V_0 + qh)\, s = V_0 s_m$$

podľa ktorých je:

$$V_0 = \frac{q d s_0}{s_m - s_0} = \frac{q h s}{s_m - s}$$

Teda miesto, kde má byť značka pre mernú hmotnosť $s$, je vo vzdialenosti

$$h = \frac{s_m - s}{s_m - s_0}\, d\, \frac{s_0}{s}$$

nad značkou $s_m$.

**7.3. Eulerova rovnica.** Pohyb kvapaliny je úplne určený, keď v každom bode vo vnútri kvapaliny je daná rýchlosť pohybu (prúdenia) jej čiastočiek (objemových elementov), ktoré vo všeobecnosti stále menia svoj tvar a v kvapalinách reálnych aj svoju veľkosť. Rozloženie rýchlostí $\mathbf{v}$ čiastočiek kvapaliny predstavuje vektorové pole. Vektor $\mathbf{v}$ závisí vo všeobecnosti od miesta aj času, $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$. Keď vektor $\mathbf{v}$ závisí len od miesta, hovoríme, že prúdenie je *ustálené (stacionárne)*. Technicky je dôležitý najmä tento posledný prípad.