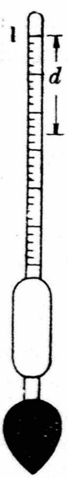
priamke (v osi plávania) dve sily rovnakých absolútnych hodnôt a opačných smerov: *tiaž telesa*, ktorej pôsobiskom je ťažisko telesa, a *vztlak*, účinkujúci v ťažisku kvapaliny telesom vytláčanej.

O stabilite plávania rozhoduje poloha tzv. *metacentra C*, priesečníka priamky vztlaku a osi plávania po jej vychýlení zo zvislej polohy *(obr. 7.8)*. Podmienkou stability plávania je zrejme, aby sa metacentrum nachádzalo nad ťažiskom plávajúceho telesa. Na lodiach býva výška metacentra vzťahujúceho sa na výkyvy okolo pozdĺžnej osi lode 50 až 100 cm nad ťažiskom T.

Úloha 1. Areometer bol zhotovený na meranie merných hmotností kvapalín ťažších ako voda. Miesto na jeho mernej rúrke, po ktoré sa areometer ponorí v kvapaline s mernou hmotnosťou s_m, je o dĺžku d nižšie ako miesto zodpovedajúce mernej hmotnosti vody $s_0 = 1\ \text{g/cm}^3$ *(obr. 7.9)*. Treba zhotoviť príslušnú stupnicu.

Riešenie: Nech je hmotnosť areometra M, jeho objem až po značku s_m nech je V_0 a prierez mernej rúrky q. Ak je areometer postupne ponorený do vody, kvapaliny s mernou hmotnosťou s_m a s mernou hmotnosťou s, sú splnené rovnice:



$$Mg = (V_0 + qd)\, s_0 g$$

$$Mg = V_0 s_m g$$

$$Mg = (V_0 + qh)\, sg$$

a teda i rovnice:

$$(V_0 + qd)\, s_0 = V_0 s_m$$

$$(V_0 + qh)\, s = V_0 s_m$$

podľa ktorých je:

$$V_0 = \frac{qds_0}{s_m - s_0} = \frac{qhs}{s_m - s}$$

Teda miesto, kte má byť značka pre mernú hmotnosť s, je vo vzdialenosti

$$h = \frac{s_m - s}{s_m - s_0}\, d\, \frac{s_0}{s}$$

nad značkou s_m.

Obr. 7.9

7.3. Eulerova rovnica. Pohyb kvapaliny je úplne určený, keď v každom bode vo vnútri kvapaliny je daná rýchlosť pohybu (prúdenia) jej čiastočiek (objemových elementov), ktoré vo všeobecnosti stále menia svoj tvar a v kvapalinách reálnych aj svoju veľkosť. Rozloženie rýchlostí $\mathbf{v}$ čiastočiek kvapaliny predstavuje vektorové pole. Vektor $\mathbf{v}$ závisí vo všeobecnosti od miesta aj času, $\mathbf{v} = \mathbf{v}\,(\mathbf{r}, t)$. Keď vektor $\mathbf{v}$ závisí len od miesta, hovoríme, že prúdenie je *ustálené (stacionárne)*. Technicky je dôležitý najmä tento posledný prípad.

Čiary, ktoré v každom svojom bode majú smer rýchlosti prúdenia kvapaliny, volajú sa *prúdnice*. Je zrejmé, že čiastočky kvapaliny sa pohybujú pozdĺž prúdnic, len keď prúdenie je ustálené. Ak ľubovoľnou uzavretou krivkou preložíme vo vnútri kvapaliny všetky prúdnice, vytvoria *prúdovú trubicu*. Pretože plášťom prúdovej trubice neprechádza žiadna kvapalina, za ustáleného prúdenia každým prierezom prúdovej trubice prechádza rovnaké množstvo kvapaliny, lebo inakšie by sa množstvo kvapaliny medzi rezmi trubice menilo.

V kvapaline, v ktorej je prúdenie, predstavme si plochu v sebe uzavretú a v priestore nehybnú. Za jednotku času opustí jej vnútro kvapalina s hmotnosťou danou vzorcom

$$\oint s\mathbf{v} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = \int \mathrm{div}\,(s\mathbf{v})\,\mathrm{d}\tau$$

kde s je merná hmotnosť. To isté množstvo však zrejme udáva aj výraz

$$-\int \frac{\partial s}{\partial t}\,\mathrm{d}\tau$$

Teda

$$\int \mathrm{div}\,(s\mathbf{v})\,\mathrm{d}\tau = -\int \frac{\partial s}{\partial t}\,\mathrm{d}\tau$$

alebo

$$\mathrm{div}\,(s\mathbf{v}) + \frac{\partial s}{\partial t} = 0 \tag{1}$$

Rovnica (1) sa volá *veta o spojitosti (kontinuite)* alebo rovnica spojitosti kvapaliny. Keď je kvapalina nestlačiteľná ($s = \mathrm{const}$), rovnica spojitosti sa zjednodušuje na tvar $\mathrm{div}\,\mathbf{v} = 0$.

Základnú rovnicu hydrodynamiky tekutín bez vnútorného trenia, *rovnicu Eulerovu*, odvodíme z rovnice (7.2.1) na str. 241.

$$\mathbf{a} = \mathbf{g} - \frac{1}{s}\,\mathrm{grad}\,p \tag{2}$$

V tejto rovnici $\mathbf{g}$ je zrýchlenie silového poľa zemského. Keď však objemová sila účinkujúca na kvapalinu je nielen jej tiažou, je zrejmé, že namiesto $\mathbf{g}$ treba písať výslednú intenzitu $\mathbf{E}$ všetkých objemových síl. Rovnica (2) je potom

$$\mathbf{a} = \mathbf{E} - \frac{1}{s}\,\mathrm{grad}\,p \tag{3}$$

Ostáva ešte vhodne vyjadriť zrýchlenie $\mathbf{a}$. Keďže rýchlosť prúdenia kvapaliny je vo všeobecnosti funkciou času a miesta, diferenciál rýchlosti prúdenia $\mathbf{v}$ je

$d\mathbf{v} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} dt + d\mathbf{r} \,.\, \text{grad}\, \mathbf{v}$. Zrýchlenie určitého objemového elementu kvapaliny dostaneme, keď za d$\mathbf{r}$ v predchádzajúcom vzorci napíšeme posunutie tohto elementu kvapaliny za čas dt, d$\mathbf{r} = \mathbf{v}\, dt$. Zrýchlenie čiastočky kvapaliny je teda

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \,.\, \text{grad}\, \mathbf{v} \tag{4}$$

Spojením rovníc (3) a (4) dostávame *Eulerovu rovnicu*

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \,.\, \text{grad}\, \mathbf{v} = \mathbf{E} - \frac{1}{s} \text{grad}\, p \tag{5}$$

ktorá by sa dala ľahko rozpísať na tri skalárne rovnice.

Ak objemová sila účinkujúca na kvapalinu alebo plyn má potenciál, takže $\mathbf{E} = -\text{grad}\, V$, Eulerova rovnica dostáva tvar

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \,.\, \text{grad}\, \mathbf{v} = -\text{grad}\, V - \frac{1}{s} \text{grad}\, p \tag{6}$$

alebo, keď merná hmotnosť kvapaliny závisí len od jej tlaku,

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \,.\, \text{grad}\, \mathbf{v} = -\text{grad}\, V - \text{grad}\, \Phi \tag{7}$$

7.4. Základy hydrodynamiky ideálnej kvapaliny, Bernoulliho rovnica. Výraz $\mathbf{v} \,.\, \text{grad}\, \mathbf{v}$ v Eulerovej rovnici (7.3.6) môžeme upraviť pomocou vzorca grad $(\mathbf{u} \,.\, \mathbf{v}) = \mathbf{u} \,.\, \text{grad}\, \mathbf{v} + \mathbf{v} \,.\, \text{grad}\, \mathbf{u} + \mathbf{u} \times \text{rot}\, \mathbf{v} + \mathbf{v} \times \text{rot}\, \mathbf{u}$, z ktorého keď volíme $\mathbf{u} = \mathbf{v}$, vyplýva:

$$\mathbf{v} \,.\, \text{grad}\, \mathbf{v} = \frac{1}{2} \text{grad}\, v^2 - \mathbf{v} \times \text{rot}\, \mathbf{v}$$

Keď sa rot $\mathbf{v}$ nerovná nule, hovoríme, že prúdenie kvapaliny je *vírové*. V opačnom prípade (rot $\mathbf{v} = 0$) sa prúdenie kvapaliny volá *nevírové*. Nevírové prúdenie kvapaliny sa nazýva i prúdením *potenciálovým*, lebo ak je rot $\mathbf{v} = 0$, jestvuje taká skalárna funkcia φ polohy bodu v priestore (potenciál rýchlosti), že $\mathbf{v} = -\,\text{grad}\, \varphi$. V tomto článku sa obmedzíme na posledný prípad. Pri nevírovom prúdení je $\mathbf{v} \,.\, \text{grad}\, \mathbf{v} = \frac{1}{2} \text{grad}\, v^2$. Eulerova rovnica dostáva tým tvar

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{1}{2} \text{grad}\, v^2 = -\text{grad}\, V - \frac{1}{s} \text{grad}\, p$$