$\mathrm{d}\mathbf{v} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}\,\mathrm{d}t + d\mathbf{r}\,.\,\mathrm{grad}\,\mathbf{v}$. Zrýchlenie určitého objemového elementu kvapaliny dostaneme, keď za $\mathrm{d}\mathbf{r}$ v predchádzajúcom vzorci napíšeme posunutie tohto elementu kvapaliny za čas $\mathrm{d}t$, $\mathrm{d}\mathbf{r} = \mathbf{v}\,\mathrm{d}t$. Zrýchlenie čiastočky kvapaliny je teda

$$\mathbf{a} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v}\,.\,\mathrm{grad}\,\mathbf{v} \tag{4}$$

Spojením rovníc (3) a (4) dostávame *Eulerovu rovnicu*

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v}\,.\,\mathrm{grad}\,\mathbf{v} = \mathbf{E} - \frac{1}{s}\,\mathrm{grad}\,p \tag{5}$$

ktorá by sa dala ľahko rozpísať na tri skalárne rovnice.

Ak objemová sila účinkujúca na kvapalinu alebo plyn má potenciál, takže $\mathbf{E} = -\mathrm{grad}\,V$, Eulerova rovnica dostáva tvar

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v}\,.\,\mathrm{grad}\,\mathbf{v} = -\mathrm{grad}\,V - \frac{1}{s}\,\mathrm{grad}\,p \tag{6}$$

alebo, keď merná hmotnosť kvapaliny závisí len od jej tlaku,

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v}\,.\,\mathrm{grad}\,\mathbf{v} = -\mathrm{grad}\,V - \mathrm{grad}\,\Phi \tag{7}$$

**7.4. Základy hydrodynamiky ideálnej kvapaliny, Bernoulliho rovnica.** Výraz $\mathbf{v}\,.\,\mathrm{grad}\,\mathbf{v}$ v Eulerovej rovnici (7.3.6) môžeme upraviť pomocou vzorca $\mathrm{grad}\,(\mathbf{u}\,.\,\mathbf{v}) = \mathbf{u}\,.\,\mathrm{grad}\,\mathbf{v} + \mathbf{v}\,.\,\mathrm{grad}\,\mathbf{u} + \mathbf{u} \times \mathrm{rot}\,\mathbf{v} + \mathbf{v} \times \mathrm{rot}\,\mathbf{u}$, z ktorého keď volíme $\mathbf{u} = \mathbf{v}$, vyplýva:

$$\mathbf{v}\,.\,\mathrm{grad}\,\mathbf{v} = \frac{1}{2}\,\mathrm{grad}\,v^2 - \mathbf{v} \times \mathrm{rot}\,\mathbf{v}$$

Keď sa $\mathrm{rot}\,\mathbf{v}$ nerovná nule, hovoríme, že prúdenie kvapaliny je *vírové.* V opačnom prípade ($\mathrm{rot}\,\mathbf{v} = 0$) sa prúdenie kvapaliny volá *nevírové.* Nevírové prúdenie kvapaliny sa nazýva i prúdením *potenciálovým,* lebo ak je $\mathrm{rot}\,\mathbf{v} = 0$, jestvuje taká skalárna funkcia $\varphi$ polohy bodu v priestore (potenciál rýchlosti), že $\mathbf{v} = -\,\mathrm{grad}\,\varphi$. V tomto článku sa obmedzíme na posledný prípad. Pri nevírovom prúdení je $\mathbf{v}\,.\,\mathrm{grad}\,\mathbf{v} = \frac{1}{2}\,\mathrm{grad}\,v^2$. Eulerova rovnica dostáva tým tvar

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{1}{2}\,\mathrm{grad}\,v^2 = -\mathrm{grad}\,V - \frac{1}{s}\,\mathrm{grad}\,p$$

Ak kvapalina je nestlačiteľná ($s$ = const), môžeme písať:

$$\operatorname{grad}\left(\frac{1}{2}v^2 + V + \frac{p}{s}\right) = -\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}$$

Pri nevírovom a ustálenom prúdení ideálnej kvapaliny je teda

$$\operatorname{grad}\left(\frac{1}{2}v^2 + V + \frac{p}{s}\right) = 0$$

alebo

$$\frac{1}{2}sv^2 + sV + p = \text{const} \tag{1a}$$

Rovnica (1$a$) je *rovnica Bernoulliho.* Hovorí: *Pri ustálenom nevírovom prúdení ideálnej kvapaliny je súčet kinetickej a potenciálnej energie objemovej jednotky a tlaku všade v kvapaline rovnaký.*

Použitím rovnice (7.2.4) ľahko možno dokázať, že v prípade stlačiteľnej kvapaliny Bernoulliho rovnica znie:

$$\frac{1}{2}v^2 + V + \Phi(p) = \text{const} \tag{1b}$$

Keď objemová sila účinkujúca na kvapalinu je len tiaž kvapaliny, vtedy $sV = sgy$ ($y$ je tu výška meraná od zvolenej vodorovnej roviny), a rovnicu (1$a$) môžeme písať aj takto

$$\frac{1}{2}sv^2 + sgy + p = k \tag{2}$$

V mieste, kde je kvapalina v pokoji, je teda tlak *(hydrostatický)*

$$p_0 = k - sgy$$

V rovnakej výške, ak kvapalina tam prúdi rýchlosťou $v$, je tlak *(hydrodynamický)*

$$p = k - sgy - \frac{1}{2}sv^2 = p_0 - \frac{1}{2}sv^2 \tag{3}$$

*Hydrodynamický tlak za ináč rovnakých podmienok je* teda *o kinetickú energiu objemovej jednotky menší ako hydrostatický tlak.*

Majme na mysli otvorenú nádobu naplnenú kvapalinou s mernou hmotnosťou $s$, ku ktorej je pripojená vodorovná výtoková trubica s meniacim sa prierezom. Jej os nech je v hĺbke $h$ pod hladinou kvapaliny *(obr. 7.10)*. Prierez nádoby vzhľadom na všetky prierezy výtokovej trubice nech je veľký, aby pohyb kvapaliny v celom zariadení bolo možné považovať za ustálené prúdenie.

Na osi vodorovnej výtokovej trubice zvoľme body $A$, $B$ a $C$ v miestach podľa obrázku. Tlaky v nich sú $p_0 = sgh + b$, $p$ a $b$, ak $b$ znamená barometrický tlak, a rýchlosti $v_0 \doteq 0$, $w$ a $v$. Tieto veličiny podľa rovnice (1$a$) vyhovujú vzťahom

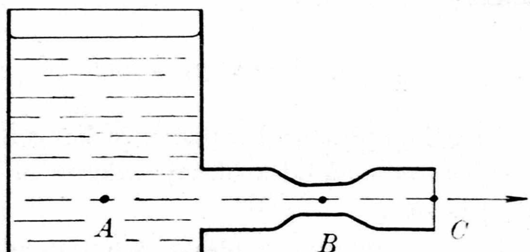
$$p_0 = p + \frac{1}{2}sw^2 = b + \frac{1}{2}sv^2$$

lebo body $A$, $B$ a $C$ sú v rovnakej výške. Z rovnice $p_0 = b + \frac{1}{2}sv^2$, totožnej s rovnicou $sgh = \frac{1}{2}sv^2$, vyplýva, že výtoková rýchlosť je:

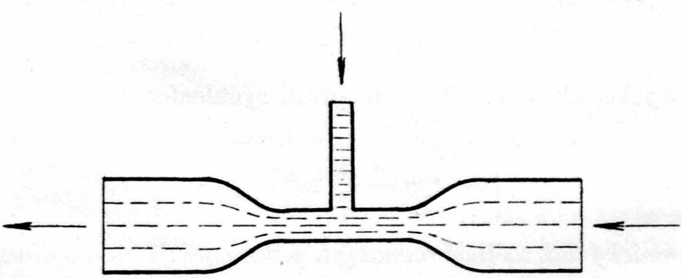
$$v = \sqrt{2gh} \tag{4}$$

*(Torricelliho vzorec)*. Pre tlak $p$ v zúženej časti výtokovej trubice zo vzťahu $p + \frac{1}{2}sw^2 = b + \frac{1}{2}sv^2$ vychádza:

$$p = b - \frac{1}{2}s(w^2 - v^2) \tag{5}$$

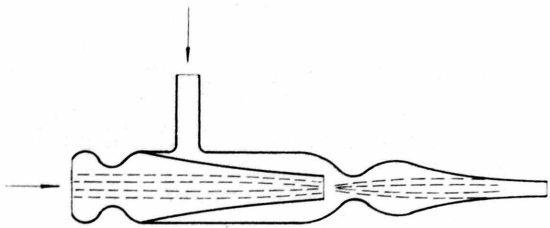



*Obr. 7.10*



*Obr. 7.11*

Tlak $p$ je teda menší ako barometrický tlak, lebo $w > v$. Správne ho vyjadruje aj vzorec $p = p_0 - \frac{1}{2}sw^2$ vyplývajúci z rovnice $p_0 = p + \frac{1}{2}sw^2$. Pripojením odbočky k zúženej časti trubice dostaneme tzv. *vodnú vývevu* v najjednoduchšom vyhotovení (*obr. 7.11*). Jej skutočná konštrukcia je znázornená na *obr. 7.12*. Pomocou vodnej vývevy možno znížiť tlak v evakuovanej nádobe až na hodnotu zodpovedajúcu niekoľko cm vodného stĺpca.



*Obr. 7.12*

Torricelliho vzorec (4) možno odvodiť aj pomocou zákona o zachovaní energie, a to takto: Cez prierez $q$ za čas $\mathrm{d}t$ pri výtokovej rýchlosti $v$ vytečie kvapalina hmotnosti $sqv\,\mathrm{d}t$; jej kinetická energia je $\frac{1}{2}sqv^3\,\mathrm{d}t$. Podľa zákona o zachovaní energie táto energia sa prakticky rovná zmenšeniu len polohovej energie kvapaliny v nádobe, zapríčinenému poklesom jej hladiny, teda $sghq_0v_0\,\mathrm{d}t = sghqv\,\mathrm{d}t$. Porovnaním dostávame hneď $v = \sqrt{2gh}$.

Podľa tohto vzorca výtoková rýchlosť kvapaliny z nádoby nezávisí od jej meranej hmotnosti, ani od veľkosti otvoru. Objem kvapaliny $V$, ktorý pretečie za čas $t$ otvorom s prierezom $q$, by mal byť: $V = qvt = qt\sqrt{2gh}$. V skutočnosti však býva menší, pretože častice tekutiny prúdiace pozdĺž steny, v ktorej je otvor, nemôžu náhle zmeniť smer svojho pohybu a zapríčiňujú zúženie vytekajúceho lúča. Pokusne sa zistilo, že lúč kvapaliny vytekajúci z kruhového otvoru v tenkej stene sa zužuje na 62 % výtokového otvoru.

**7.5. Pitotova a Venturiho trubica.** Pitotova aj Venturiho trubice slúžia na meranie rýchlostí prúdenia tekutín v potrubiach a obidve sú založené na Bernoulliho rovnici.

Predstavme si, že do vodorovného potrubia, ktorým prúdi kvapalina rýchlosťou $\mathbf{v}$, v dostatočne veľkej vzájomnej vzdialenosti od seba sú vložené dve rúrky tvaru a spôsobom, ako je to znázornené na *obr. 7.13*. Prvá z nich sa volá *Pitotova trubica*. Podľa Bernoulliho rovnice v bodoch $A_1$ a $A_2$ hodnota dvojčlena $p + \frac{1}{2}sv^2$ je rovnako veľká. Nech je $p_1$ tlak v bode $A_1$, a $p_2$ tlak v bode $A_2$. Pretože sa v priereze dopredu ohnutého konca Pitotovej trubice