kde $\mathbf{v}_2$ a $\mathbf{v}_1$ sú rýchlosti kvapaliny na strane výtoku a vtoku do kolena. Sila $\mathbf{F}$ pozostáva z reakcie potrubia $\mathbf{R}$, ktorú chceme určiť, a z výslednice $\mathbf{P}$ celkových tlakov pq, ktoré pôsobia v rezoch A_1B_1 a A_2B_2, takže $\mathbf{R} = \mathbf{F} - \mathbf{P}$. Podľa *obr. 7.16* sila $\mathbf{P}$ má absolútnu hodnotu $P = 2pq \sin \alpha$ a je so silou $\mathbf{F}$ nesúhlasne rovnobežná. Preto absolútna hodnota reakcie $\mathbf{R}$ je

$$R = F + P = \varrho s v \, |\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1| + 2pq \sin \alpha =$$
$$= 2\varrho s v^2 \sin \alpha + 2pq \sin \alpha = 2q(\varrho s v^2 + p) \sin \alpha$$

Keby kvapalina neprúdila, bola by táto reakcia $R' = 2pq \sin \alpha$. Zväčšenie reakcie kolena v dôsledku prúdenia kvapaliny je teda $2q\varrho s v^2 \sin \alpha$.

Príklad 2. Dôležitou úlohou je aj určenie sily $\mathbf{F}$ vodného lúča narážajúceho napríklad kolmo na pevnú rovinnú stenu *(obr. 7.17)*. Aplikovaním rovnice (2) na priestor medzi koncom potrubia a stenou dostávame ihneď, že reakcia steny je:

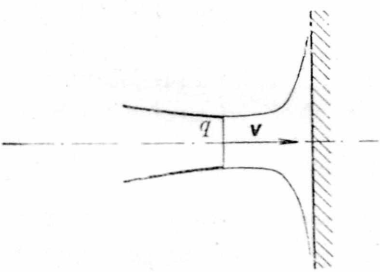
$$\mathbf{R} = -sq v \mathbf{v}$$

takže absolútna hodnota sily vodného lúča je $F = sqv^2$.

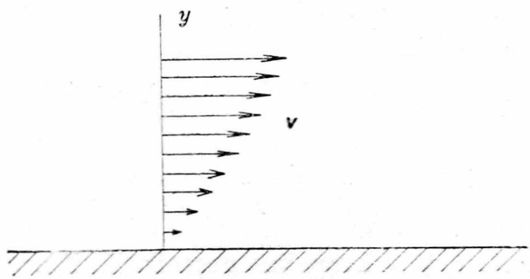
Keby sa stena pohybovala rýchlosťou $\mathbf{u}$, prispievala by k integrálu $\int i\mathbf{v} \, \mathrm{d}S$ členom $sqv\mathbf{u}$. Reakcia steny by v tom prípade bola $\mathbf{R}' = -sqv(\mathbf{v} - \mathbf{u})$ a abs. hodnota sily vodného lúča len $F' = sqv(v - u)$. Jej výkon by bol:

$$N = \mathbf{F}' \, . \, \mathbf{u} = sqv(\mathbf{v} - \mathbf{u}) \, . \, \mathbf{u} = sqv(v - u)\, u$$

Tento výkon je najväčší pri takej rýchlosti steny u, pri ktorej je $\dfrac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}u} = 0$, t. j. $v - 2u = 0$, teda $v = 2u$, čiže ak rýchlosť steny sa rovná polovici rýchlosti vodného lúča.



Obr. 7.17



Obr. 7.18

7.7. Vnútorné trenie. Doteraz sme sa zaoberali pohybom kvapalín nestlačiteľných aj stlačiteľných, no stále dokonale tekutých, v ktorých aj za pohybu môžu jestvovať len normálové napätia, obyčajne tlaky. Skutočné kvapaliny sú však len nedokonale tekuté, čo je zapríčinené tým, že sa pri zmenách vzájomných polôh objemových elementov kvapaliny musia premáhať určité vnútorné, v kvapaline pôsobiace sily, ktoré sa volajú *vnútorné trenie*.

Predstavme si kvapalinu prúdiacu nad dnom širokého žľabu. Tesne pri dne sa v dôsledku veľkého trenia kvapaliny o dno kvapalina nepohybuje. S výškou sa rýchlosť kvapaliny zväčšuje *(obr. 7.18)*. Podľa experimentálnej skúsenosti dve susedné vrstvy stýkajúce sa vo výške y pôsobia na seba tangenciálnym napätím, ktoré je tým väčšie, čím viac sa mení rýchlosť prúdenia pri postupe v smere na prúdnice kolmom. Vrstva od dna vzdialenejšia účinkuje na vrstvu ku dnu bližšiu v smere prúdenia tangenciálnym napätím s absolútnou hodnotou

$$\tau = \eta \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}y} \tag{1}$$

Aby sme našli vektorové vyjadrenie obsahu vzorca (1), platné pre akékoľvek prúdenie kvapaliny s vnútorným trením, budeme uvažovať takto: Plošné sily vznikajúce v prúdiacej kvapaline v dôsledku vnútorného trenia majú svoju príčinu v nerovnakých rýchlostiach jednotlivých čiastočiek kvapaliny. Napätia od vnútorného trenia môžu byť teda závislé tiež len od relatívnych rýchlostí jednotlivých čiastočiek kvapaliny. Rozloženie rýchlosti prúdenia kvapaliny v okolí určitého jej bodu určuje gradient vektora rýchlosti $\mathbf{v}$ v tomto bode, takže $\mathrm{d}\mathbf{v} = \mathrm{d}\mathbf{r} \,.\, \mathrm{grad}\, \mathbf{v}$. Ak rozložíme tenzor grad $\mathbf{v}$ na symetrickú a antisymetrickú časť, bude:

$$\mathrm{d}\mathbf{v} = \mathrm{d}\mathbf{r} \,.\, \nabla\mathbf{v} = \mathrm{d}\mathbf{r} \,.\, \frac{1}{2}(\nabla\mathbf{v} + \mathbf{v}\nabla) + \mathrm{d}\mathbf{r} \,.\, \frac{1}{2}(\nabla\mathbf{v} - \mathbf{v}\nabla) =$$

$$= \frac{1}{2}\,\mathrm{d}\mathbf{r} \,.\, (\nabla\mathbf{v} + \mathbf{v}\nabla) + \frac{1}{2}(\mathrm{rot}\,\mathbf{v}) \times \mathrm{d}\mathbf{r} = \frac{1}{2}\,\mathrm{d}\mathbf{r} \,.\, (\nabla\mathbf{v} + \mathbf{v}\nabla) + \omega \times \mathrm{d}\mathbf{r}$$

keď sme pre úpravu druhého člena použili z vektorovej algebry známu identitu $\mathbf{a} \,.\, (\mathbf{bc} - \mathbf{cb}) = (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \times \mathbf{a}$.

Druhý člen $\boldsymbol{\omega} \times \mathrm{d}\mathbf{r}$ v našom vyjadrení diferenciálu rýchlosti predstavuje tú jeho časť, ktorá zodpovedá otáčaniu kvapaliny v okolí jej zvoleného bodu ako celku uhlovou rýchlosťou $\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{v}$. Pri takomto pohybe sa však jednotlivé čiastočky kvapaliny po sebe navzájom neposunujú, takže sily vnútorného trenia v kvapaline nevznikajú. Z uvedeného je zrejmé, že sily vnútorného trenia budú funkciou len tej časti derivácie vektora rýchlosti v danom smere, ktorá je v našom vyjadrení určená symetrickou časťou tenzora grad $\mathbf{v}$. V zmysle vzorca (1) pre napätie $\boldsymbol{\nu}$, ktoré jestvuje v kvapaline v dôsledku vnútorného trenia, môžeme preto písať

$$\boldsymbol{\nu} = \eta\mathbf{n} \,.\, (\nabla\mathbf{v} + \mathbf{v}\nabla) \tag{2}$$

kde $\mathbf{n}$ je jednotkový vektor kolmý na plôšku, na ktorú zo strany jej orientácie v dôsledku vnútorného trenia pôsobí napätie $\boldsymbol{\nu}$.

Konštanta úmernosti η vo vzorcoch (1) a (2) sa nazýva *(dynamický) koeficient vnútorného trenia (viskozity)*. Jeho rozmer je $[\eta] = g/\mathrm{cms}$. Reciproká hodnota dynamického koeficientu viskozity je *fluidita* čiže *tekutosť kvapaliny*, $\varphi = \dfrac{1}{\eta}$. Používa sa aj tzv. *kinematický koeficient viskozity*, $\mu = \eta/s$, kde s je merná hmotnosť kvapaliny.

Ešte stále používanými jednotkami dynamickej a kinematickej viskozity sú *poise* a *stok*

$$poise = \mathrm{g/cms}, \qquad 1\ stok = \mathrm{cm^2/s}$$

Príklady koeficientov viskozity podáva *tabuľka 7.2.*

Tabuľka 7.2

Koeficienty viskozity pri 18 °C

Kvapalina	η [g/cms]	Kvapalina	η [g/cms]
Éter	0,0026	Ortuť	0,0159
Benzén	0,0067	Terp. olej	0,019
Voda	0,0105	Anilín	0,046
Alkohol	0,0122	Glycerol	10,7

S rastúcou teplotou sa koeficienty viskozity rýchle zmenšujú, napr. koeficient viskozity vody pri 0 °C je 0,0179 *poise*, no pri 100 °C už len 0,0028 *poise*.

Pomerne veľké trenie na „suchom" styku dvoch pevných telies možno nahradiť podstatne menším vnútorným trením mastiva. Keby napríklad vrstva oleja medzi čapom a ložiskom mala všade rovnakú hrúbku δ, pri obvodovej rýchlosti v by vnútorným trením vznikalo tangenciálne napätie $\tau = \eta\,\dfrac{v}{\delta}$ po celom obvode čapu. Ak polomer čapu je r a jeho dĺžka l, vnútorným trením vznikla by v ložisku dvojica síl s momentom

$$D = 2\pi r l \tau \,.\, r = \frac{2\pi r^2 l v \eta}{\delta}$$

Tento *Petrovov vzorec* predpokladá, že čap nepôsobí tlakom na ložisko, a vyhovuje približne len v prípadoch malého tlaku čapu a veľmi rýchleho otáčania. V takýchto prípadoch sa odporúča používať na mastenie olej s malým koeficientom viskozity. Tlakom čapu na ložisko sa však celý jav mení. Za pokoja spočíva čap dolnou povrchovou priamkou na ložisku a tam pri roztáčaní vzniká skoro len trenie za sucha, ktoré je pomerne veľké. Pri otáčaní čapu sa privádza olej adhéziou aj do predošlého stykového miesta. Čoskoro nastane rovnovážny stav, pri ktorom je všade medzi čapom a ložiskom vrstva oleja, avšak nerovnakej hrúbky; miesto najtenšej vrstvy je o niečo posunuté od spodného bodu v smere otáčania čapu. Čím viskóznejší je olej a čím väčšia je rýchlosť otáčania, tým rovnomernejšia je vrstva oleja medzi čapom a ložiskom a tým viac sa teda približuje skutočný stav k stavu ideálnemu (s vrstvou oleja všade rovnakou). Zvýšenie tlaku čapu, naopak, podporuje nerovnomernosť vrstvy oleja. Aby bolo trenie čo najmenšie, treba pri veľkom tlaku čapu a malej rýchlosti otáčania používať olej s väčšou viskozitou, a naopak, pri malom tlaku a veľkej rýchlosti — olej s malou viskozitou.

Pri odvodzovaní *Eulerovej rovnice* sme predpokladali, že ide o kvapalinu dokonale tekutú, teda bez vnútorného trenia. Pre skutočné kvapaliny, ak ich vnútorné trenie nemožno zanedbať, Eulerovu rovnicu treba preto príslušne upraviť. Pri odvodzovaní Eulerovej rovnice sme predpokladali, že plošnou silou účinkujúcou na vybranú časť kvapaliny je len sila $\mathbf{F}_2 = -\oint p\,\mathrm{d}\mathbf{S}$, kde p je tlak v kvapaline. Pri kvapalinách, v ktorých za pohybu účinkuje vnútorné trenie, treba k plošnej sile $\mathbf{F}_2$ pridať ešte plošnú silu (pozri vzorec 2).

$$\mathbf{F}_2' = \oint \boldsymbol{\nu}\,\mathrm{d}S = \eta \oint \mathrm{d}\mathbf{S}\,.\,(\nabla\mathbf{v} + \mathbf{v}\nabla) = \eta \int \nabla\,.\,(\nabla\mathbf{v} + \mathbf{v}\nabla)\,\mathrm{d}\tau =$$

$$= \eta \int (\Delta\mathbf{v} + \operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{v})\,\mathrm{d}\tau$$

alebo, ak kvapalina je nestlačiteľná, takže div $\mathbf{v} = 0$,

$$\mathbf{F}_2' = \eta \int (\Delta\mathbf{v})\,\mathrm{d}\tau$$

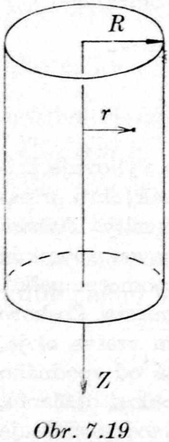
kde $\boldsymbol{\nu}$ je napätie vytvárané vnútorným trením a $\mathrm{d}\tau$ diferenciál objemu. Rovnica (1) je potom

$$\mathbf{g} - \frac{1}{s}\operatorname{grad} p + \frac{\eta}{s}\Delta\mathbf{v} = \mathbf{a}$$

a namiesto rovnice Eulerovej dostávame rovnicu

$$\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v}\,.\operatorname{grad}\mathbf{v} = -\operatorname{grad} V - \frac{1}{s}\operatorname{grad} p + \frac{\eta}{s}\Delta\mathbf{v} \tag{3}$$

ktorá sa volá *rovnica Navier—Stokesova.*



Obr. 7.19

Ako príklad na použitie Navier—Stokesovej rovnice vypočítame objem viskóznej kvapaliny, ktorá pretečie cez zvislú úzku rúrku dĺžky l za čas t a za pretlaku Δp na koncoch rúrky, ak vnútorný polomer rúrky je R a koeficient viskozity kvapaliny η *(obr. 7.19).*

V našom prípade ľavá strana rovnice (7.3.3) sa rovná nule, lebo — podľa rovnice (7.3.4) na str. 248 — dvojčlen $\dfrac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v}\,.\operatorname{grad}\mathbf{v}$ značí zrýchlenie určitého elementu kvapaliny, ktoré za ustáleného výtoku kvapaliny cez úzku rúrku sa všade v rúrke rovná nule. Pre ďalšie spracovanie takto zjednodušenej rovnice (3), t. j. rovnice

$$s\operatorname{grad} V + \operatorname{grad} p = \eta\Delta\mathbf{v} \tag{4}$$

os Z valcovej sústavy súradníc stotožníme so zvislou a dolu orientovanou osou rúrky. Rovnica (4) potom znie:

$$-sg\mathbf{k} + \frac{\partial p}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial p}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial p}{\partial z}\mathbf{k} = \eta(\Delta v)\,\mathbf{k} \tag{5}$$

a z nej vyplýva, že $\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial y} = 0$, čo znamená, že v tom istom vodorovnom priereze rúrky je tlak p všade rovnaký. Rovnicu (5) môžeme teraz už nahradiť jedinou skalárnou rovnicou,

$$-sg + \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z} = \eta\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r}\right)$$

keďže, ak $\boldsymbol{r}$ je vektor na os rúrky kolmý,

$$\Delta v = \nabla\,.\,\nabla v = \nabla\,.\left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r}\frac{\boldsymbol{r}}{r}\right) = \left(\nabla\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r}\right).\,\boldsymbol{r} + \frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r}\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{r} =$$
$$= \left(\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}^2v}{\mathrm{d}r^2} - \frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r}\right)\frac{\boldsymbol{r}\,.\,\boldsymbol{r}}{r} + \frac{2}{r}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r} = \frac{\mathrm{d}^2v}{\mathrm{d}r^2} + \frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r} = \frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r}\right)$$

Položme $C = -sg + \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z} = -sg - \frac{\Delta p}{l}$. Predchádzajúca rovnica bude potom

$$\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r}\right) = \frac{C}{\eta}$$

alebo

$$\mathrm{d}\left(r\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r}\right) = \frac{C}{\eta}\,r\,\mathrm{d}r$$

$$r\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r} = \frac{Cr^2}{2\eta} + A$$

$$\mathrm{d}v = \left(\frac{Cr}{2\eta} + \frac{A}{r}\right)\mathrm{d}r$$

$$v = \frac{Cr^2}{4\eta} + A\ln r + B$$

V tomto výsledku integračná konštanta A sa musí rovnať nule, lebo ináč by rýchlosť v v strede rúrky bola nekonečná. Ostávajúcu integračnú konštantu B určíme z podmienky, že tesne pri vnútornej stene rúrky ($r = R$) musí byť $v = 0$. Vychádza: $B = -\frac{CR^2}{4\eta}$, takže

$$v = \frac{C(r^2 - R^2)}{4\eta} = \left(sg + \frac{\Delta p}{l}\right)\frac{R^2 - r^2}{4\eta} \tag{6}$$

alebo, ak obyčajne pomerne malý prvý člen v zátvorke zanedbávame:

$$v = \frac{\Delta p}{l}\,\frac{R^2 - r^2}{4\eta} \tag{7}$$

Vzorcom (6) daná závislosť rýchlostí čiastočiek kvapaliny od ich vzdialenosti od osi je znázornená na *obr. 7.20.*

Podľa výsledku (7) cez medzikružie s polomerom r a so šírkou dr za čas t pretečie tekutina s objemom

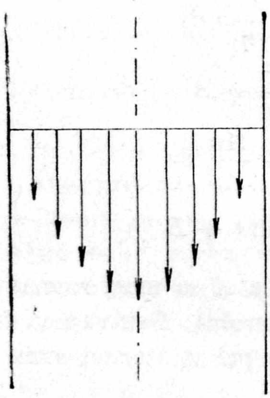
$$\mathrm{d}V = 2\pi r\,\mathrm{d}r\,.\,vt = \frac{\pi}{2\eta}\,\frac{\Delta p}{l}\,(R^2 - r^2)\,tr\,\mathrm{d}r$$

a cez celý prierez trubice teda s objemom

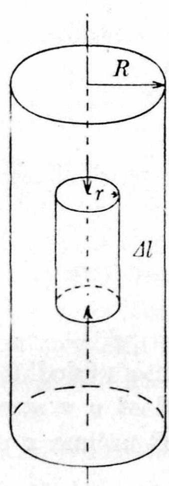
$$V = \frac{\pi}{2\eta}\,.\,\frac{\Delta p}{l}\int_0^R t(R^2r - r^3)\,\mathrm{d}r = \frac{\pi}{2\eta}\,\frac{\Delta p}{l}\,t\left[\frac{R^2r^2}{2} - \frac{r^4}{4}\right]_0^R = \frac{\pi}{8\eta}\,\frac{\Delta p}{l}\,R^4t \qquad (8)$$

Vzorce (8) odvodil r. 1846 francúzsky fyzik **Poiseuille**. Vzorec (6) sme odvodili pomocou vektorovej diferenciálnej rovnice Navier—Stokesovej (3) len preto, aby sme na tomto jednoduchom príklade znázornili jej význam. Vzorec (6) a tým aj vzorec (8) možno však odvodiť aj pomocou jednoduchej elementárnej úvahy.

Vo vnútri výtokovej trubice si predstavme valec s trubicou súosový, ktorého polomer $r < R$ a dĺžka je Δl *(obr. 7.21)*. Pretože pri ustálenom vytekaní kvapaliny sa rýchlosť určitého elementu kvapaliny vo výtokovej trubici s časom nemení, znamená to, že pretlak Δp (zväčšený prípadne o tiaž kvapaliny



Obr. 7.20



Obr. 7.21

vo valci) účinkujúci na základňu valca s obsahom πr^2 je v rovnováhe s vnútorným trením na plášti valca, ktorého povrch je $2\pi r\,.\,\Delta l$. Je preto správna rovnica

$$\pi r^2\,.\,\Delta p + \pi r^2 sg\Delta l = 2\pi r\,\Delta l\,.\,\tau = -2\pi r\Delta l\,.\,\eta\,\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r}$$

z ktorej úpravou a integráciou vyplýva:

$$sg + \frac{\Delta p}{\Delta l} = -\frac{2\eta}{r}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r}$$

$$\mathrm{d}v = -\frac{1}{2\eta}\left(sg + \frac{\Delta p}{\Delta l}\right) r\,\mathrm{d}r$$

$$v = -\frac{1}{2\eta}\left(sg + \frac{\Delta p}{\Delta l}\right)\frac{r^2}{2} + v_0$$

kde v_0 je rýchlosť v osi výtokovej trubice. Nájdeme ju z podmienky, že pre $r = R$ je $v = 0$,

$$v_0 = \frac{1}{2\eta}\left(sg + \frac{\Delta p}{\Delta l}\right)\frac{R^2}{2}$$

Rýchlosť v v zhode so vzorcom (6) je teda

$$v = \frac{1}{4\eta}\left(sg + \frac{\Delta p}{\Delta l}\right)(R^2 - r^2)$$

Fyzikálny obsah výsledku (8) môžeme vyjadriť ajináč, a to pomocou priemernej rýchlosti výtoku v_p určenej vzťahom $V = v_p\,\pi R^2 t$. Keď takto vyjadrený objem V dosadíme do rovnice (8), dostaneme rovnicu

$$v_p \pi R^2 t = \frac{\pi}{8\eta} \cdot \frac{\Delta p}{l} R^4 t$$

podľa ktorej sila pretláčajúca kvapalinu cez úzku rúrku, ak index „p" v označení priemernej rýchlosti už vynecháme, je:

$$F = \pi R^2 \Delta p = 8\pi\eta\, lv \tag{9}$$

a rovná sa sile odporu rúrky proti tomuto pohybu.

Keď naopak nejaké tuhé teleso sa pohybuje rovnomerne vo veľkom množstve kvapaliny, táto kladie odpor v nej sa pohybujúcemu tuhému telesu. Keď sa v kvapaline alebo aj v plyne pohybuje guľa s priemerom r rýchlosťou v, podľa príslušného výpočtu, ktorý ako prvý vykonal Stokes[1]), tento odpor je:

$$F = 6\pi\eta r v \tag{10}$$

K veci sa ešte vrátime v čl. 7.17.

---

[1]) Sir Georg Gabriel Stokes (1819 — 1903), anglický matematik a fyzik, profesor na univerzite v Cambridge, neskôr prezident Royal Society.

Pri počítaní výtoku viskóznej kvapaliny cez úzku trubičku sme predpokladali, že prúdnice sú priamky rovnobežné s osou výtokovej rúrky. Takéto prúdenie kvapaliny sa volá prúdenie *laminárne*. Za tohto predpokladu sme dostali výsledok (6), podľa ktorého pôsobením vnútorného trenia sa absolútna hodnota výtokovej rýchlosti v od stredu trubičky k jej stenám zmenšuje podľa parabolického zákona. Utvorením rotácie vektora výtokovej rýchlosti $\mathbf{v}$, určeného napríklad vzorcom (7), môžeme sa presvedčiť, že laminárne prúdenie kvapaliny je vírové. Vychádza skutočne

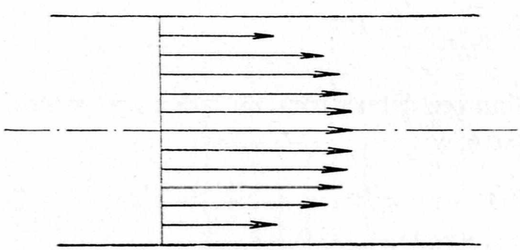
$$\operatorname{rot} \mathbf{v} = \nabla \times \frac{\Delta p}{4\eta l}(R^2 - r^2)\,\mathbf{k} = \nabla \times A(R^2 - r^2)\,\mathbf{k} = -A\nabla \times r^2\mathbf{k} =$$

$$= -A(\operatorname{grad} r^2) \times \mathbf{k} = -A2\mathbf{r} \times \mathbf{k} = 2A\mathbf{k} \times \mathbf{r} = \frac{\Delta p}{2\eta l}\,\mathbf{k} \times \mathbf{r} \neq 0$$

pričom $\mathbf{k}$ je jednotkový vektor rovnobežný s osou trubičky.

Vírový charakter laminárneho prúdenia je príčinou, že sa laminárne prúdenie pri väčších rýchlostiach neudrží, a že sa zmení na prúdenie *turbulentné*, pri ktorom prúdnice nie sú už priamky, lež krivky, ktoré sa s časom rýchle a nepravidelne menia.

Premenu laminárneho prúdenia na prúdenie turbulentné možno dobre pozorovať, keď sa do širšej sklenej trubice vpúšťa tenké vlákno sfarbenej kvapaliny. Pri laminárnom prúdení vidíme vo výtokovej trubici tenkú, s osou trubice rovnobežnú farebnú nitku. Keď sa však laminárne prúdenie premení na turbulentné, farebné vlákno sa veľmi rýchle stráca v susednej kvapaline.



Obr. 7.22

Hoci sa za turbulentného prúdenia rýchlosť jednotlivých častíc kvapaliny nepravidelne mení, predsa možno určiť isté priemerné rozloženie rýchlosti po priereze výtokovej rúrky *(obr. 7.22)*. Na stene rúrky je kvapalina v pokoji. V tenkej vrstve pri stene sa rýchlosť značne mení (približne úmerne so vzdialenosťou od steny), a už v malej vzdialenosti od steny je skoro taká veľká ako v osi rúrky.

Premenou laminárneho prúdenia kvapalín v potrubiach na prúdenie turbulentné sa, ako prvý, podrobne zaoberal Reynolds. Podľa Reynoldsa podmienkou vzniku turbulentného prúdenia v potrubí je, aby bezrozmerná veličina, tzv. *Reynoldsovo číslo*

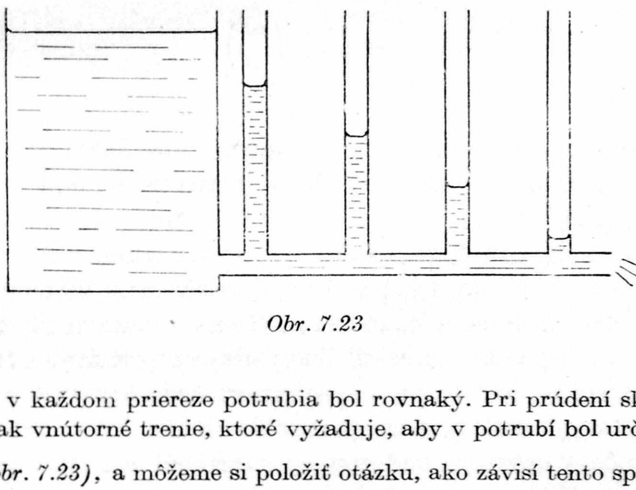
$$R = \frac{svd}{\eta} = \frac{vd}{\mu} \tag{11}$$

(kde d je priemer potrubia s kruhovým prierezom, v stredná rýchlosť prúdenia a μ kinematický koeficient viskozity, $[\mu] = \mathrm{cm^2/s}$) bolo väčšie ako asi 2 400. Podľa toho kritická rýchlosť určitej kvapaliny v danom potrubí, pri ktorej sa prúdenie laminárne mení na prúdenie turbulentné, je:

$$v_k = \frac{2\,400\mu}{d}$$

Pre vodu ($\mu = 0{,}01\ \mathrm{cm^2/s}$) v potrubí s vnútorným priemerom napríklad $d = 2$ cm vychádza: $v_k = 12$ cm/s. Z toho príkladu je zrejmé, že v technicky dôležitých prípadoch prúdenie kvapalín v potrubiach je turbulentné.

K výrazu (11), ktorý vyjadruje Reynoldsovo číslo, môžeme dospieť takto: Majme na mysli ustálené prúdenie kvapaliny vo vodorovnom potrubí s kruhovým prierezom všade rovnako veľkým. Keby kvapalina bola ideálna, podľa Bernoulliho rovnice tlak



Obr. 7.23

v kvapaline by v každom priereze potrubia bol rovnaký. Pri prúdení skutočných kvapalín vzniká však vnútorné trenie, ktoré vyžaduje, aby v potrubí bol určitý spád tlaku, $\omega = -\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}$ *(obr. 7.23)*, a môžeme si položiť otázku, ako závisí tento spád od priemeru potrubia d a od vlastností kvapaliny a jej pohybu. Z hľadiska dynamického prakticky nestlačiteľná kvapalina je úplne určená svojou mernou hmotnosťou s a koeficientom viskozity η alebo, ak chceme, kinematickým koeficientom viskozity μ. O pohybe kvapaliny v potrubí môžeme predpokladať, že v prvom priblížení je dostatočne určený priemernou rýchlosťou prúdenia v, definovanou podielom objemu V kvapaliny pretekajúcej potrubím za jednotku času a prierezu potrubia q, $v = \dfrac{V}{q}$. Podľa toho treba teda nájsť závislosť $\omega = \varphi(d, s, \mu, v)$. Z Bernoulliho rovnice však vyplýva, že kinetická energia objemovej jednotky kvapaliny $\dfrac{1}{2}\,sv^2$ má rozmer tlaku, podiel $\dfrac{sv^2}{2d}$ teda rozmer tlakového spádu.

Preto, ak napíšeme

$$\omega = \frac{sv^2}{2d} \cdot \frac{\varphi(d, s, \mu, v)}{sv^2/2d} = \frac{sv^2}{2d} f(d, s, \mu, v)$$

funkcia $f(d, s, \mu, v)$ bude veličinou bezrozmernou, takže jej číselná hodnota nebude závisieť od voľby sústavy jednotiek. Ak budeme o nej predpokladať, že má tvar súčinu mocnín premenných d, s, μ, v a bezrozmernej číselnej konštanty A, môžeme napísať dimenzionálnu rovnicu

$$[d]^x \, [s]^y \, [\mu]^z \, [v]^u = 1$$

alebo

$$\mathrm{cm}^x (\mathrm{gcm}^{-3})^y \, (\mathrm{cm}^2\mathrm{s}^{-1})^z \, (\mathrm{cms}^{-1})^u = 1$$

t. j. rovnicu

$$g^y \, \mathrm{cm}^{x-3y+2z+u} \, \mathrm{s}^{-z-u} = 1$$

podľa ktorej musí byť $y = 0$, $x - 3y + 2z + u = 0$, $-z - u = 0$, teda $x = -z$, $y = 0$, $u = -z$. Podľa týchto výsledkov funkcia $f(d, s, \mu, v)$ má tvar $f(d, s, \mu, v) = A \left(\frac{\mu}{vd}\right) = AR^{-z} = h(R)$, kde $R = \frac{vd}{\mu}$ je Reynoldsovo číslo, takže

$$\omega = \frac{sv^2}{2d} \, h\left(\frac{vd}{\mu}\right)$$

7.8. Povrchové napätie kvapalín. Z tvarovej nestálosti kvapalín vyplýva, že na rozdiel od látok pevných molekuly kvapalín nemajú určitú vzájomnú polohu. Na druhej strane malá stlačiteľnosť a v porovnaní s plynmi veľká hustota kvapalín dokazujú, že stredné hodnoty vzájomných vzdialeností molekúl v kvapalinách sú napriek tomu malé, takže príťažlivé sily, ktoré medzi nimi pôsobia, tzv. *kohézne sily*, sú veľké. Tieto príťažlivé sily spolu s neurčitosťou vzájomnej polohy molekúl kvapaliny zapríčiňujú, že najmä malé množstvá kvapaliny, keď to na kvapalinu súčasne účinkujúce vonkajšie sily dovoľujú, dostávajú guľový tvar (kvapôčky hmly, kvapôčky emulzií olejov vo vode, kvapôčky ortuti na vodorovnej, napríklad sklenej doske a pod.), lebo guľa je teleso, v ktorom je pri danom objeme stredná hodnota vzájomnej vzdialenosti vždy dvoch a dvoch bodov najmenšia. No guľa je súčasne aj teleso, ktoré pri danom objeme má najmenší povrch. Môžeme preto povedať aj toto: Vplyvom kohéznych síl sa kvapalina usiluje dostať tvar telesa s povrchom podľa možnosti čo najmenším.

Kvapaliny sa teda správajú tak, ako keby ich povrchovou vrstvou bola veľmi tenká a napätá blana, usilujúca sa povrch kvapaliny zmenšiť, a *povrchovým napätím (kapilárnou konštantou) sa nazýva sila účinkujúca v tejto vrstve na dĺžkovú jednotku.*