

merne značný vplyv na povrchové napätie aj pri malých koncentráciách je umožnený tým, že sa hromadia v povrchovej vrstve, kde pôsobia proti vzájomnej príťažlivosti molekúl vody.

7.9. Laplaceova rovnica. Predstavme si, že sme na konci sklenej rúrky vyfúkli mydlovú bublinu s polomerom R (obr. 7.26). Pretože sa kvapalinová blana pôsobením povrchového napätia usiluje svoj povrch zmenšiť, za rovnováhy je tlak p vo vnútri bubliny väčší než tlak p_0 na vonkajšej strane. Rozdiel obidvoch tlakov vyplýva zo zákona o zachovaní energie.

Ak v zariadení podľa obr. 7.26 prierez valca je q , za rovnováhy sila účinkujúca na piest musí byť $F = (p - p_0) q$. Posunutím piesta o dĺžku ds sa vykoná práca $dL = F ds = (p - p_0) q ds = (p - p_0) dV$, pričom dV je súčasné zväčšenie objemu bubliny. Podľa zákona o zachovaní energie práca $dL = (p - p_0) dV$ sa rovná zväčšeniu povrchovej energie blany $2\sigma dS$. Teda

$$(p - p_0) dV = 2\sigma dS$$

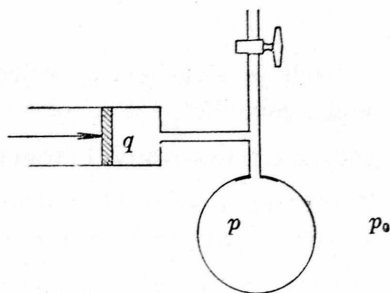
alebo

$$p - p_0 = 2\sigma \frac{dS}{dV} = 2\sigma \frac{8\pi R dR}{4\pi R^2 dR} = \frac{4\sigma}{R} \quad (1)$$

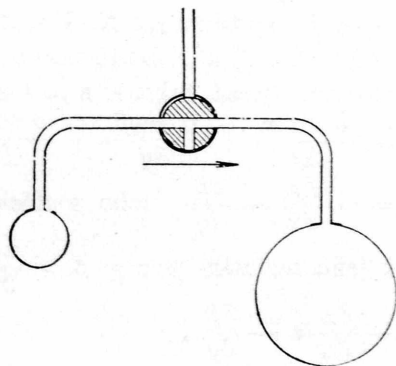
Podľa tohto výsledku tlak $p = p_0 + \frac{4\sigma}{R}$ je väčší v bubline s menším polomerom. Dokazuje to aj tento pokus: Keď na koncoch rozvetvenej rúrky pomocou tej istej kvapaliny vytvoríme dve bubliny s rozličnými polormi, po postavení kohúta do polohy podľa obr. 7.27 menšia bublina nafukuje väčšiu.

Vzorec (1) je len zvláštnym prípadom *Laplaceovej rovnice*, ktorá vyjadruje rozdiel tlakov po obidvoch stranách povrchu ľubovoľného tvaru.

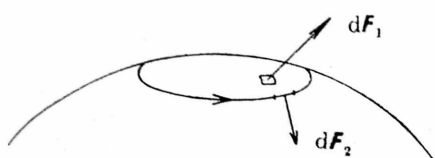
V rozhraní oddeľujúcom dve rôzne kvapaliny, alebo kvapalinu a plyn, predstavme si čiaru v sebe uzavretú (obr. 7.28). Na povrchovú vrstvu vnútri tejto čiary účin-



Obr. 7.26



Obr. 7.27



Obr. 7.28

kujú jednak tlaky p a p_0 po obidvoch stranách povrchu, jednak povrchové napätie pozdĺž hraničnej čiary. Tieto sily, ak plošný vektor $d\mathbf{S}$ orientujeme na tú stranu povrchu, kde účinkuje tlak p_0 , sú:

$$\mathbf{F}_1 = \int (p - p_0) d\mathbf{S}, \quad \mathbf{F}_2 = \oint \sigma d\mathbf{s}$$

a ich súčet sa za rovnováhy rovná nule.

Nech je $\boldsymbol{\tau}$ tangenciálny jednotkový vektor so zvoleným ohraničením povrchu rovnobežný a $\mathbf{n}$ normálový jednotkový vektor s plošným vektorom $d\mathbf{S}$ súhlasne orientovaný. Potom $\boldsymbol{\sigma} = \sigma(\boldsymbol{\tau} \times \mathbf{n})$, takže sila $\mathbf{F}_2$ je aj $\mathbf{F}_2 = \sigma \oint (d\mathbf{s} \times \mathbf{n})$. Za účelom úpravy získaného vyjadrenia sily $\mathbf{F}_2$ pomocou Stokesovej vety každému bodu normály k rozhraniu priradíme jednotkový vektor $\mathbf{n}$ s jej orientáciou súhlasne rovnobežný. Dostávame potom: $\mathbf{F}_2 = \sigma \oint (d\mathbf{s} \times \mathbf{n}) = \sigma \oint (d\mathbf{s} \times \mathbf{n}) \cdot \mathbf{l} = \sigma \oint d\mathbf{s} \cdot (\mathbf{n} \times \mathbf{l}) = \sigma \int d\mathbf{S} \cdot [\nabla \times (\mathbf{n} \times \mathbf{l})] = \sigma \int d\mathbf{S} \cdot [\mathbf{n}(\nabla \cdot \mathbf{l}) - (\nabla \cdot \mathbf{n})\mathbf{l}] = -\sigma \int (\text{div } \mathbf{n}) d\mathbf{S}$, keďže prvý z posledných dvoch integrálov sa rovná nule, lebo $d\mathbf{S} \cdot (\mathbf{n} \nabla) \cdot \mathbf{l} = d\mathbf{S} \cdot \mathbf{n} \nabla = dS \mathbf{n} \cdot (\mathbf{n} \nabla) = dS \mathbf{n} \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{n}}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial z} \mathbf{k} \right)$ a ak os Z zvolíme rovnobežne s vektorom $\mathbf{n}$, bude $\frac{\partial \mathbf{n}}{\partial z} = 0$ a vektory $\frac{\partial \mathbf{n}}{\partial x}$ a $\frac{\partial \mathbf{n}}{\partial y}$ budú kolmé na vektor $\mathbf{n}$. Z rovnice $\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 = 0$, t. j. z rovnice

$$\int (p - p_0) d\mathbf{S} - \sigma \int (\text{div } \mathbf{n}) d\mathbf{S} = 0$$

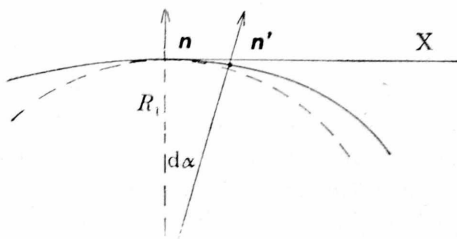
platnej pre ľubovoľné ohraničenie časti povrchu kvapaliny, vyplýva: $p - p_0 = \sigma(\nabla \cdot \mathbf{n})$.

Na vypočítanie $\text{div } \mathbf{n}$ zvolíme bod povrchu kvapaliny za začiatok súradnicového systému osí X , Y a Z , a os Z zvolíme rovnobežne s normálou k povrchu. Osi X a Y budú potom v rovine tangenciálnej. Jednotkový vektor $\mathbf{n}$ môžeme písať takto: $\mathbf{n} = \mathbf{i} \cos \alpha + \mathbf{j} \cos \beta + \mathbf{k} \cos \gamma$. Je potom $\text{div } \mathbf{n} = \frac{\partial \cos \alpha}{\partial x} + \frac{\partial \cos \beta}{\partial y} + \frac{\partial \cos \gamma}{\partial z} = -\sin \alpha \frac{\partial \alpha}{\partial x} - \sin \beta \frac{\partial \beta}{\partial y} - \sin \gamma \frac{\partial \gamma}{\partial z} = -\frac{\partial \alpha}{\partial x} - \frac{\partial \beta}{\partial y}$, lebo v dôsledku vhodnej voľby súradnicového systému v jeho začiatku je $\alpha = \beta = \frac{\pi}{2}$ a $\gamma = 0$. Treba ešte určiť parciálne derivácie $-\frac{\partial \alpha}{\partial x}$ a $-\frac{\partial \beta}{\partial y}$.

Rovina XZ pretína povrch kvapaliny v určitej krivke, ktorej polomer kri-

vosti nech je R_1 . Podľa obr. 7.29 je zrejmé $\frac{dx}{-d\alpha} = R_1$, teda $-\frac{\partial \alpha}{\partial x} = \frac{1}{R_1}$.

Podobným spôsobom by sme dostali, že $-\frac{\partial \beta}{\partial y} = \frac{1}{R_2}$, ak R_2 je polomer krivosti krivky, v ktorej povrch kvapaliny pretína rovina YZ . Podľa týchto výsledkov je $\text{div } \mathbf{n} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$



Obr. 7.29

$$a \quad p - p_0 = \sigma \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \quad (2)$$

kde R_1 a R_2 sú polomery krivosti dvoch normálových rezov povrchu kvapaliny na seba kolmých, počítané kladne na stranu, kde tlak je p .

Z diferenciálnej geometrie plôch je však známe, že súčet krivostí dvoch na seba kolmých rezov plochy je v danom bode plochy konštantný a že sa teda rovná súčtu maximálnej a minimálnej normálovej krivosti plochy v tomto bode. Ak príslušné polomery týchto tzv. hlavných krivostí sú R a R' , rovnica (2) je aj

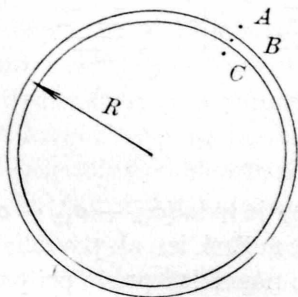
$$p - p_0 = \sigma \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'} \right) \quad (3)$$

Rovnica (3) sa volá *Laplaceova*.

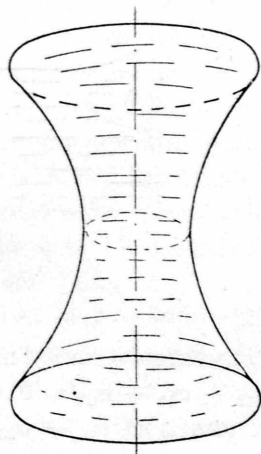
V prípade mydlovej bubliny obidva hlavné polomery krivosti sú rovnaké a rovnajú sa polomeru bubliny R . Preto — ak je na vonkajšej strane bubliny tlak p_0 — podľa rovnice (3) v bode B (obr. 7.30) je tlak $p' = p_0 + \frac{2\sigma}{R}$,

a teda v bode C $p = p' + \frac{2\sigma}{R} = p_0 + \frac{4\sigma}{R}$,

ako ho určuje aj vzorec (1).



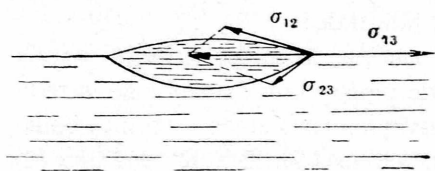
Obr. 7.30



Obr. 7.31

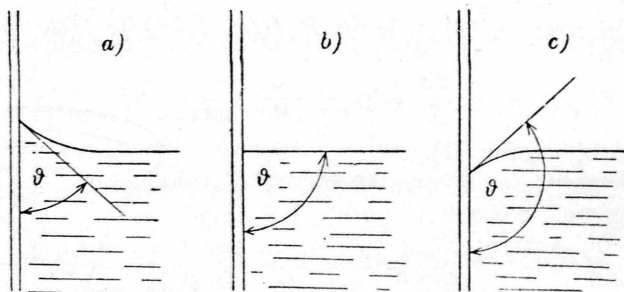
Keď kvapalinová blana neohraničuje určitý priestor, ale je len vypnutá v nejakom rámečku, vtedy $p - p_0 = 0$, a preto aj $\frac{1}{R} + \frac{1}{R'} = 0$. Túto podmienku splňuje zrejme rovinná blana. Keď však rámček neleží v jednej rovine, takže je napríklad $R > 0$, potom je nutne $R' < 0$; inými slovami: *stredy hlavných normálových krivostí v rámčeku vypnutej blany ležia po jej obidvoch stranách*. Blana má teda v takomto prípade vždy sedlovitý tvar (obr. 7.31).

7.10. Styk povrchu kvapaliny s pevnou stenou. Predstavme si najprv, že sme na vodorovnú hladinu vody dali kvapôčku parafínového oleja. Parafínový olej nerozprestrie sa po celej vodnej hladine, ale po nadobudnutí šošovkovitého tvaru ostane sústredený na jednom mieste (obr. 7.32). V kružnici, ktorá



Obr. 7.32

potom oddeľuje povrch vody od oleja, stýkajú sa tri rozhrania: rozhranie vzduchu a oleja s povrchovým napätím σ_{12} , rozhranie vzduchu a vody s povrchovým napätím σ_{13} a rozhranie oleja a vody s povrchovým napätím σ_{23} . Pôsobením týchto povrchových napätí kvapôčka oleja sa rozťahne na vodnej hladine práve len natoľko, aby sily účinkujúce na dĺžkový element ds kružnice, ktorá kvapôčku ohraničuje, boli vo vzájomnej rovnováhe, čiže aby sa ich súčet



Obr. 7.33

ako súčet vektorov rovnal nule. Za rovnováhy je teda $(\sigma_{12} + \sigma_{13} + \sigma_{23})ds = 0$, alebo $\sigma_{12} + \sigma_{13} + \sigma_{23} = 0$, čo je, prirodzene, možné, len ak povrchové napätia splňujú nerovnosť $\sigma_{12} + \sigma_{23} > \sigma_{13}$, ako je to napríklad práve pri parafínovom