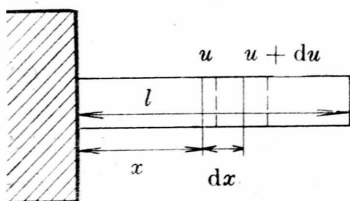


Obr. 8.12

kde $k = 1, 2, 3, \dots$. Frekvencia, ktorú udáva vzorec (3) pre $k = 1$, nazýva sa *základnou frekvenciou* chvenia struny; frekvencie ostatné — *vyššími harmonickými frekvenciami*.

Okolnosť, že rovnica (1) je v u homogénna a prvého stupňa, pripúšťa aj taký pohyb struny, ktorý možno pokladať za superpozíciu chvenia struny so základnou frekvenciou a chvení s vyššími harmonickými frekvenciami.

8.4. Pozdĺžne chvenie pružnej tyče upevnenej na jednom konci. Tyč valcovitého alebo hranolovitého tvaru s dĺžkou l a s prierezom q nech je upevnená na jednom svojom konci (obr. 8.13). Merná hmotnosť tyče nech je s .



Obr. 8.13

pohybu. Diferenciálna rovnica struny (1) pripúšťa však taký pohyb jej hmotných elementov, ktorý možno považovať za stojaté vlnenie struny — za jej chvenie. Podmienkou je zrejme, aby sa dĺžka struny rovnala celistvému násobku vzdialenosti dvoch susedných uzlov v stojatom vlnení, čiže aby bolo $l = k \frac{\lambda}{2}$, alebo $\lambda = \frac{2l}{k}$, pretože konce struny môžu byť len uzlami (obr. 8.13). Z rovnice

$$\frac{2l}{k} = \lambda = vT = T \sqrt{\frac{F}{s}}$$

vyplýva, že frekvencia chvenia struny môže byť len

$$v = \frac{1}{T} = \frac{k}{2l} \sqrt{\frac{F}{s}} \quad (3)$$

Priečný rez tyče, ktorý za rovnováhy v tyči bol vo vzdialenosti x od jej pevného začiatku, za šírenia sa pozdĺžneho rozruchu v tyči (vyvolaného napríklad nárazom kladiva na voľné čelo tyče) nech má pozdĺžnu výchylku veľkosti $u = u(x)$, rez vo vzdialenosti $x + dx$ výchylku $u + du = u(x + dx)$. Relatívne predĺženie tyče medzi týmito rezmi je:

$$\varepsilon = \frac{u(x + dx) - u(x)}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\sigma}{E}$$

kde σ je normálové napätie vyvolané v tyči jej pozdĺžnou deformáciou a E modul pružnosti materiálu tyče v ťahu. Teda $\sigma = E\varepsilon = E \frac{\partial u}{\partial x}$. Na časť tyče medzi jej priečnymi rezmi vo vzdialenosti x a $x + dx$ účinkuje preto sila

$$\begin{aligned} d\mathbf{R} &= \mathbf{i}(F_{x+dx} - F_x) = iq(\sigma_{x+dx} - \sigma_x) = iqE \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_{x+dx} - \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_x \right] = \\ &= iqE \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx = qE \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial x^2} dx \end{aligned}$$

Podľa Newtonovho zákona sily je súčasne

$$d\mathbf{R} = \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} sq dx$$

Pri pozdĺžnych pohyboch priečných rezov pružnej tyče je preto stále

$$\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} sq dx = qE \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial x^2} dx$$

alebo

$$\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = \frac{E}{s} \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial x^2} \quad (1)$$

Z tohto výsledku pomocou tých istých úvah ako pri strune vyplýva, že

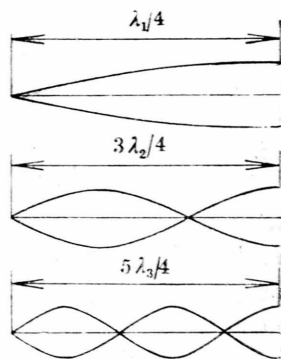
1. v pružnej tyči môžu sa šíriť pozdĺžne rozruchy rýchlosťou

$$v = \sqrt{\frac{E}{s}} \quad (2)$$

2. v pružnej tyči dĺžky l , upevnenej na jednom konci, môže vzniknúť pozdĺžne chvenie s vlnovou dĺžkou λ spĺňajúcou podmienku

$$l = (2k - 1) \frac{\lambda}{4} \quad (3)$$

lebo voľný koniec tyče na jednom konci upevnenej môže byť len kmitnou a upevnený koniec tyče len uzlom (obr. 8.14.)



Obr. 8.14

Podľa rovnice

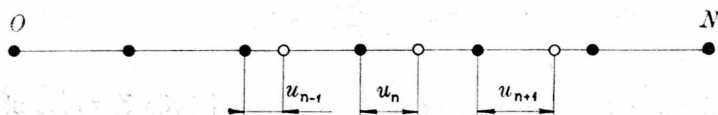
$$\frac{4l}{2k-1} = \lambda = vT = T \sqrt{\frac{E}{s}}$$

frekvencie pozdĺžneho chvenia tyče upevnenej na jednom konci môžu byť teda len

$$v = \frac{1}{T} = \frac{2k-1}{4l} \sqrt{\frac{E}{s}} \quad (4)$$

kde $k = 1, 2, 3, \dots$

Podobne ako chvenie struny, aj pozdĺžne chvenie pružnej tyče môže byť superpozíciou chvenia so základnou frekvenciou ($k = 1$) a chvení s vyššími harmonickými frekvenciami. Všimnime si, že kým vo chvení struny môžu byť zastúpené všetky vyššie harmonické frekvencie, v pozdĺžnom chvení tyče



Obr. 8.15

upevnenej na jednom konci môžu byť zastúpené iba nepárne násobky základnej frekvencie. Keby však tyč bola upevnená na oboch koncoch, potom možné frekvencie jej pozdĺžneho chvenia by boli dané vzorcom podobným vzoru 8.3.3, ktorý sme odvodili pre chvenie struny.

Práve tak ako deformácia pružnej tyče ohybom je jav zložitejší ako jej deformácia predĺžením, aj priečne chvenie pružnej tyče, pri ktorom dochádza k jej ohybu, je zložitejší dej ako jej pozdĺžne chvenie. Pre túto príčinu budeme sa priečnym chvením pružných tyčí zaoberať až neskôr — v akustike. Namiesto toho pre ich základný význam v teórii pevných látok odvodíme už v tejto súvislosti niekoľko vzťahov platných pre pozdĺžne kmity hmotných bodov, tvoriacich sústavu navzájom spriahnutých lineárnych oscilátorov, znázornenú už aj na obr. 8.4a.

Nech je takáto sústava zložená z $N + 1$ hmotných bodov s rovnakou hmotnosťou m , očíslovaných číslami $0, 1, 2, \dots, n-1, n, n+1, \dots, N$ (obr. 8.15). Nultý a N -tý nech sú nepohyblivé a ostatné nech sa môžu pohybovať len pozdĺž svojej spoločnej priamky. Ich rovnaká vzájomná vzdialenosť za stavu pokoja nech je a . Výchylka n -tého hmotného bodu za chvenia nech je u_n . Za predpokladu pružných vzájomných väzieb, splňujúcich Hookeov zákon, sila pôsobiaca na n -tý hmotný bod je:

$$f_n = C(u_{n+1} - u_n) - C(u_n - u_{n-1}) = C(u_{n-1} - 2u_n + u_{n+1}) \quad (5)$$

takže vzhľadom aj na silový Newtonov zákon pre každý z $N - 1$ neupevnených hmotných bodov je splnená rovnica

$$m \frac{d^2 u_n}{dt^2} = C(u_{n-1} - 2u_n + u_{n+1}) \quad (6)$$

v ktorej C je konštanta úmernosti. Dosadením sa presvedčíme o tom, že jej vyhovuje riešenie

$$u_n = A \sin \left[\omega \left(t - \frac{na}{v} \right) - \varphi \right] + A \sin \left[\omega \left(t + \frac{na}{v} \right) + \varphi \right] \quad (7)$$

predstavujúce dve navzájom proti sebe rýchlosťou v postupujúce harmonické vlny, lebo súčin $x = na$ vyjadruje vzdialenosť n -tého hmotného bodu od nultého. Rovnicu (7) môžeme napísať aj v tvare

$$u_n = 2A \sin \omega t \cos \left(\frac{2\pi na}{vT} + \varphi \right) = 2A \sin \omega t \cos (qna + \varphi) \quad (8)$$

keď sme zaviedli aj tzv. *vlnovú veličinu* $q = \frac{2\pi}{vT} = \frac{2\pi}{\lambda}$. Ak volíme $\varphi = -\frac{\pi}{2}$, dostaneme:

$$u_n = 2A \sin \omega t \sin (qna) \quad (9)$$

$$\ddot{u}_n = -2A\omega^2 \sin \omega t \sin (qna) \quad (10)$$

Dosadením týchto funkcií do diferenciálnej rovnice (6) dostaneme podmienku, ktorá musí byť splnená, ak funkcia (9) má byť riešením diferenciálnej rovnice (6). Vychádza:

$$\begin{aligned} -m\omega^2 \sin qna &= k [\sin q(n-1)a - 2 \sin qna + \sin q(n+1)a] = \\ &= -2k \sin (qna) [1 - \cos (qa)] = -4k \sin (qna) \sin^2 \left(\frac{qa}{2} \right) \end{aligned}$$

alebo

$$\omega = 2 \sqrt{\frac{C}{m}} \left| \sin \frac{qa}{2} \right| \quad (11)$$

Treba však ešte splniť aj zvolené okrajové podmienky. Voľbou $\varphi = -\frac{\pi}{2}$ v rovnici (8) sme už splnili prvú, podľa ktorej pre $n = 0$ má byť v každom

čase $u_n = 0$. Druhá podmienka žiada, aby bolo $u_n = 0$ aj pre $n = N$. Podľa rovnice (9) to vedie ku vzťahu $\sin(qNa) = 0$, t. j. $qNa = k\pi$ alebo

$$q = \frac{k\pi}{Na} \quad (12)$$

kde k je celé číslo. Dosadením tohto výsledku do vzťahu (11) dostaneme:

$$\omega = 2 \sqrt{\frac{C}{m}} \left| \sin \frac{k\pi}{2N} \right| \quad (13a)$$

alebo

$$v = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{C}{m}} \left| \sin \frac{k\pi}{2N} \right| \quad (13b)$$

Vzorce (13) vyjadrujú možné frekvencie pozdĺžneho kmitania hmotných bodov našej jednorozmernej sústavy.

Treba si však uvedomiť, že funkcia $\left| \sin \frac{k\pi}{2N} \right|$ ako funkcia celého čísla k je periodická. Jej periódou je zrejme celé číslo $p = 2N$. Keďže okrem toho pre argumenty k a $(2N - k)$ má táto funkcia rovnaké hodnoty, pre výpočet možných frekvencií stačí do vzorca (13) dosadzovať za k čísla 0 až N .

Voľba $k = 0$ neprichádza do úvahy, lebo v tom prípade — podľa vzorca (12) a rovnice (9) — v každom čase a pre všetky n je $u_n = 0$. To však znamená, že sústava hmotných bodov je v pokoji. Pre tú istú príčinu neprichádza do úvahy ani voľba $k = N$. Možných frekvencií pozdĺžneho kmitania hmotných bodov našej sústavy $N + 1$ hmotných bodov je teda len $N - 1$, práve toľko, koľko je v nej pohyblivých hmotných bodov. Sú určené vzorcom

$$v = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{C}{m}} \sin \frac{k\pi}{2N} \quad (14)$$

v ktorom k je celé číslo vyhovujúce nerovnostiam $0 < k < N$, takže všetky frekvencie sú menšie ako $v_m = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{C}{m}}$.

Keby obidva konce pružnej tyče boli nehybné, zo vzorca (2) podobnou úvahou ako pri strune dostali by sme pre možné frekvencie jej pozdĺžneho chvenia vzorec

$$v = \frac{k}{2l} \sqrt{\frac{E}{s}} \quad (15)$$

Porovnáme oba tieto vzorce. Podľa posledného vzorca vzhľadom na jeho odvodenie počet možných frekvencií pozdĺžneho chvenia pružnej tyče upevnenej

na obidvoch koncoch je nekonečne veľký, zatiaľ čo podľa predposledného vzorca v jednorozmernej sústave diskretných hmotných bodov počet možných frekvencií pozdĺžnych kmitov je len $N - 1$.

Kvôli ďalšiemu zrovnaniu vzorcov (14) a (15) posledný z nich upravíme takto

$$\nu = \frac{k}{2l} \sqrt{\frac{E}{s}} = \frac{k}{2l} \sqrt{\frac{\sigma}{\varepsilon s}} = \frac{k}{2l} \sqrt{\frac{\sigma S}{\varepsilon s S}} = \frac{k}{2l} \sqrt{\frac{f}{s' \varepsilon}}$$

kde σ je napätie v tyči, ε jej relatívne predĺženie, S jej prierez, f sila pôsobiaca v celom priereze a $sS = s'$ hmotnosť pripadajúca na jednotku dĺžky tyče. Keby sme podľa tohto vzorca chceli počítat možné frekvencie pozdĺžneho kmitania hmotných bodov v ich jednorozmernej sústave, s ktorou sa zaoberáme, museli by sme napísať:

$$s' = \frac{m}{a}, \quad f = C(u_{n+1} - u_n), \quad \varepsilon = \frac{u_{n+1} - u_n}{a}$$

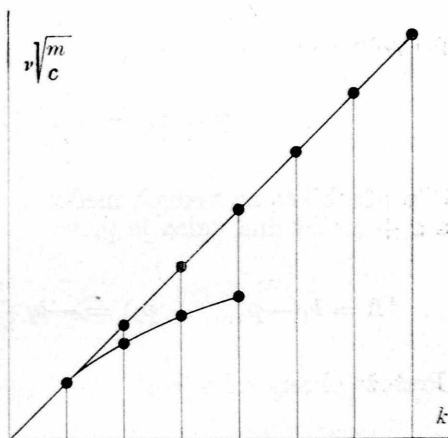
takže by sme dostali:

$$\nu = \frac{k}{2l} \sqrt{\frac{Ca^2}{m}} = \frac{k}{2N} \sqrt{\frac{C}{m}} \quad (16)$$

Vzorec (14) a vzorec (16) sú však totožné len vtedy, ak je $k \ll N$, kedy

$$\nu = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{C}{m}} \sin \frac{k\pi}{2N} \doteq \frac{k}{2N} \sqrt{\frac{C}{m}}$$

Ich súvis pre $N = 6$ znázorňujú krivky na obr. 8.16. Porovnanie vlastností pružnej tyče spojene vyplnenej hmotou a sústavy hmotných bodov s pružnými vzájomnými väzbami dosť názorne ukazuje, že predstavy o spojitom a nespojitom rozložení hmoty v telesách v extrémnych prípadoch nevedú k rovnakým výsledkom. V našom prípade nie sú tieto výsledky rovnaké, ak $k \doteq N$, čo podľa vzorca (12) znamená, že je $\frac{qa}{\pi} \doteq 1$



Obr. 8.16

alebo $\frac{2a}{\lambda} \doteq 1$, teda $\lambda \doteq 2a$. Ak je však číslo N veľké, potom mnoho nižších frekvencií určených vzorcami (14) a (16) je prakticky totožných.

8.5. Chvenie vzdušného stĺpca vo valci uzavretom na jednom konci. Valec dĺžky l a s prierezom q , na jednom konci uzavretý a na druhom konci otvorený, nech obsahuje vzduch alebo akýkoľvek iný plyn, ktorého merná hmotnosť je s .

Vzduch vo valci môže byť v pozdĺžnom vlnivom pohybe vyvolanom napríklad pôsobením dosky (membrány reproduktora zvuku), ktorá je pred otvoreným koncom valca (obr. 8.17). Molekuly vzduchu, ktoré za stavu (makroskopického) pokoja boli všetky vo vzdialenosti x od uzavretého konca (dna) valca, pri vlnení vzduchu vo valci majú pozdĺžnu výchylku veľkosti $u = u(x)$, molekuly v pokojovej

vzdialenosti $(x + dx)$ od dna valca výchylku veľkosti $u + du = u(x + dx)$. Pokojový objem plynu medzi príslušnými priečnymi rezmi nech je $V_0 = q dx$. Za vlnenia tento objem je:

$$V = q[dx + u(x + dx) - u(x)] = q \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x} \right) dx = V_0 \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x} \right)$$

Keď koeficient stlačiteľnosti vzduchu (vo valci prítomného plynu) je k , zo vzorca $k = -\frac{1}{V_0} \frac{\Delta V}{\Delta p} = -\frac{1}{V_0} \frac{V - V_0}{p - p_0}$ vyplýva, že tlak vzduchu vo valci pri jeho vlnivom pohybe je:

$$p = p_0 - \frac{1}{kV_0} (V - V_0) = p_0 - \frac{1}{k} \frac{\partial u}{\partial x} \quad (1)$$

Sila pôsobiaca na vzduch medzi dvoma priečnymi rezmi vo vzdialenostiach x a $x + dx$ od dna valca je preto

$$d\mathbf{R} = iq(-p_{x+dx} + p_x) = -iq \frac{\partial p}{\partial x} dx = i \frac{q}{k} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx = \frac{q}{k} \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial x^2} dx$$

Pretože okrem toho je aj

$$d\mathbf{R} = qs \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} dx$$