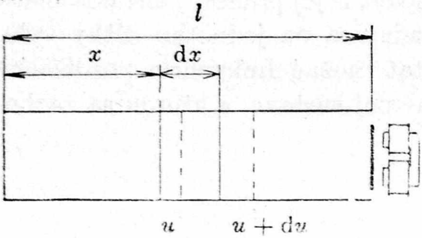
alebo $\frac{2a}{\lambda} \doteq 1$, teda $\lambda \doteq 2a$. Ak je však číslo N veľké, potom mnoho nižších frekvencií určených vzorcami (14) a (16) je prakticky totožných.

8.5. Chvenie vzdušného stĺpca vo valci uzavretom na jednom konci. Valec dĺžky l a s prierezom q, na jednom konci uzavretý a na druhom konci otvorený, nech obsahuje vzduch alebo akýkoľvek iný plyn, ktorého merná hmotnosť je s. Vzduch vo valci môže byť v pozdĺžnom vlnivom pohybe vyvolanom napríklad pôsobením dosky (membrány reproduktora zvuku), ktorá je pred otvoreným koncom valca *(obr. 8.17)*. Molekuly vzduchu, ktoré za stavu (makroskopického) pokoja boli všetky vo vzdialenosti x od uzavretého konca (dna) valca, pri vlnení vzduchu vo valci majú pozdĺžnu výchylku veľkosti $u = u(x)$, molekuly v pokojovej vzdialenosti $(x + dx)$ od dna valca výchylku veľkosti $u + du = u(x + dx)$. Pokojový objem plynu medzi príslušnými priečnymi rezmi nech je $V_0 = q\, dx$. Za vlnenia tento objem je:



Obr. 8.17

$$V = q[dx + u(x + dx) - u(x)] = q\left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right) dx = V_0\left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right)$$

Keď koeficient stlačiteľnosti vzduchu (vo valci prítomného plynu) je k, zo vzorca $k = -\frac{1}{V_0}\frac{\Delta V}{\Delta p} = -\frac{1}{V_0}\frac{V - V_0}{p - p_0}$ vyplýva, že tlak vzduchu vo valci pri jeho vlnivom pohybe je:

$$p = p_0 - \frac{1}{kV_0}(V - V_0) = p_0 - \frac{1}{k}\frac{\partial u}{\partial x} \tag{1}$$

Sila pôsobiaca na vzduch medzi dvoma priečnymi rezmi vo vzdialenostiach x a $x + dx$ od dna valca je preto

$$d\mathbf{R} = \mathbf{i}q(-p_{x+dx} + p_x) = -\mathbf{i}q\frac{\partial p}{\partial x}dx = \mathbf{i}\frac{q}{k}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}dx = \frac{q}{k}\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial x^2}dx$$

Pretože okrem toho je aj

$$d\mathbf{R} = qs\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2}dx$$

kde s je merná hmotnosť vzduchu za stavu pokoja, pri vlnivom pohybe vzduchu vo valci výchylky priečnych rezov valca viazaných na tento vzduch splňujú diferenciálnu rovnicu

$$\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = \frac{1}{ks} \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial x^2} \tag{2}$$

V tomto tvare je rovnica (2) splnená aj pri pozdĺžnom vlnení stlačiteľnej kvapaliny vo valci, za predpokladu, že steny valca sú dostatočne pevné, aby pri zmenách tlaku vo valci nedochádzalo k zmenám jeho priečnych rozmerov. Z nej vyplýva, že rýchlosť šírenia sa rozruchov v kvapaline alebo plyne, ktoré vyplňujú valec s dostatočne pevnými stenami, je:

$$v = \sqrt{\frac{1}{ks}} \tag{3}$$

kde k je koeficient stlačiteľnosti a s merná hmotnosť.

V prípade vlnenia plynu možno predpokladať, že príslušné zmeny tlaku sú dostatočne rýchle, aby sa mohli považovať za adiabatické. Koeficient stlačiteľnosti k vo vzorci (3) treba preto pri plynoch pokladať za ich adiabatický koeficient stlačiteľnosti, ktorý podľa vzorca (7.13.5) na str. 278 je $k = \dfrac{1}{\varkappa p}$, pričom $\varkappa = c_p/c_v$ je tzv. *Poissonova konštanta* (pozri čl. 7.13). Rýchlosť postupu vlnenia (napríklad zvuku) vo valci s plynom mernej hmotnosti s a za tlaku p (nulu ako index v označení rovnovážneho tlaku plynu sme už vynechali) je teda

$$v = \sqrt{\varkappa \frac{p}{s}} \tag{4}$$

alebo, ak mernú hmotnosť plynu pri danej teplote vyjadríme pomocou mernej hmotnosti s_0 pri teplote 0 °C a tejto teploty,

$$s = \frac{s_0}{1 + \gamma t}$$

(pozri čl. 10.15),

$$v = \sqrt{\varkappa \frac{p}{s_0} (1 + \gamma t)} \tag{5}$$

Pri teplote $t = 0$ °C a za tlaku $p = 760$ torr $= 0{,}9807 \,.\, 10^5$ N/m² merná hmotnosť vzduchu je $s_0 = 0{,}001\,293$ g/cm³ a $\varkappa = 1{,}402$. Pretože podiel p/s_0 je pri plynoch prakticky od tlaku nezávislý, vo vzorci (5) môžeme za tlak p

dosadiť tlak ľubovoľný, napríklad rovnajúci sa 760 torr, ak súčasne za s_0 dosadíme mernú hmotnosť pri tomto tlaku. Rýchlosť postupu vlnenia vo vzduchu, ktorý je vo valci, podľa vzorca (5) pri 0° C a pri každom tlaku má teda byť

$$v_0 = \sqrt{1{,}402 \frac{1\,013\,000}{0{,}001\,293}} \frac{\text{cm}}{\text{s}} = 331{,}4 \text{ m/s}$$

Pri teplote napríklad 20 °C by táto rýchlosť mala byť približne

$$v = v_0 \sqrt{1 + \gamma t} \doteq v_0 \left(1 + \frac{\gamma}{2} t\right) = 331{,}4 \left(1 + \frac{20}{2\,.\,273}\right) \frac{\text{m}}{\text{s}} =$$

$$= 331{,}4\,.\,\frac{566}{546} \frac{\text{m}}{\text{s}} = 342{,}9 \text{ m/s}$$

V nasledujúcom článku sa presvedčíme, že vzorce (3), (4) a (5) správne vyjadrujú rýchlosť postupu vlnení aj v neohraničenom plynnom prostredí, vzorec (3) aj v prostredí kvapalnom. Naopak, experimentálne merania ukazujú, že vo valcoch, napríklad v dlhých potrubiach, je táto rýchlosť trochu menšia než podľa týchto vzorcov: pri kvapalinách hlavne v dôsledku nedokonalej pevnosti stien, ktorá sa prejavuje ako zdanlivá väčšia stlačiteľnosť kvapaliny v takomto valci, pri plynoch najmä v dôsledku vnútorného trenia.

Práve tak ako na strune alebo v pružnej tyči harmonické stojaté vlnenie sa môže vytvoriť aj vo valci s plynom. Pre jeho vlnovú dĺžku vo valci dĺžky l napríklad len na jednom konci uzavretom platí: $l = (2k + 1) \frac{\lambda}{4}$, takže z rovnice

$$\frac{4l}{2k + 1} = \lambda = vT = \frac{1}{\nu} \sqrt{\varkappa \frac{p}{s_0} (1 + \gamma t)}$$

vyplýva, že v takomto valci (napríklad v uzavretej píšťale) môže byť stojaté vlnenie len s frekvenciami

$$\nu_u = \frac{2k + 1}{4l} \sqrt{\varkappa \frac{p}{s_0} (1 + \gamma t)} \tag{6}$$

Pre valec dĺžky l na obidvoch koncoch otvorený, akým je napríklad každá otvorená píšťala, však platí: $l = k \frac{\lambda}{2}$, takže v takomto valci môže byť stojaté vlnenie s frekvenciami

$$\nu_0 = \frac{k}{2l} \sqrt{\varkappa \frac{p}{s_0} (1 + \gamma t)} \tag{7}$$

Pomer príslušných základných frekvencií pri valcoch rovnako dlhých je $\nu_o : \nu_u = 2$, čo znamená, že pri dvoch rovnako dlhých píšťalách základný tón otvorenej píšťaly má dvojnásobnú frekvenciu ako základný tón píšťaly uzavretej.

Rozruch, ktorý sa šíri v nejakom pružnom prostredí, možno charakterizovať nielen pomocou výchyliek jeho hmotných elementov, ale aj pomocou iných veličín, ktoré sú od nich závislé. Pri šírení sa vlnení v plynoch alebo kvapalinách okrem výchyliek $\boldsymbol{u}$ sú to najmä ich časové zmeny $\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t}$, tlak p, resp. pretlak $p - p_0$, a relatívne zväčšenie objemu (dilatácia) $\varphi = \frac{V - V_0}{V_0}$.

Majme na mysli šírenie sa rozruchu vo valci s plynom alebo kvapalinou, pri ktorom pozdĺžne výchylky elementov hmotného prostredia, počítané kladne vo zvolenom smere, sú:

$$u = f\left(t \mp \frac{x}{v}\right)$$

Vtedy [pozri aj vzorec (1)]

$$\frac{\partial u}{\partial t} = f'\left(t \mp \frac{x}{v}\right)$$

$$p - p_0 = -\frac{1}{k}\,\frac{\partial u}{\partial x} = \pm\,\frac{1}{vk}\,f'\left(t \mp \frac{x}{v}\right) \tag{8}$$

a

$$\varphi = -k(p - p_0) = \mp\,\frac{1}{v}\,f'\left(t \mp \frac{x}{v}\right) \tag{9}$$

Podľa týchto výsledkov pri vlnení plynu alebo kvapaliny vo valci je:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \pm\, vk\,(p - p_0) = \mp v\varphi = \mp v\,\frac{\partial u}{\partial x} \tag{10}$$

takže napríklad

$$\frac{\partial u}{\partial t} : \varphi = \mp\, v \tag{11}$$

slovami: v mieste, kde nastalo stlačenie ($\varphi \lessgtr 0$), je $\frac{\partial u}{\partial t} \gtrless 0$, čiže v tom mieste pohyb objemových elementov kvapaliny alebo plynu vo valci je vždy súhlasne rovnobežný so smerom postupu vlnenia.

S použitím práve odvodených vzorcov uvažujme ešte o odraze rozruchu na uzavretom konci valca obsahujúceho nejaký plyn. Ak os X rovnobežná s osou valca smeruje od uzavretého konca valca, rozruch postupujúci proti smeru osi X je vyjadrený funkciou tvaru $u_1 = f\left(t + \frac{x}{v}\right)$. Odraz rozruchu na uzavretom konci valca, kde sa výchylky objemových elementov plynu prítomného vo valci trvale rovnajú nule, práve tak ako odraz rozruchu na upevnenom konci struny opisuje algebraický súčet

$$u = u_1 + u_2 = f\left(t + \frac{x}{v}\right) - f\left(t - \frac{x}{v}\right)$$

avšak podľa vzorca (8) pre pretlak vychádza:

$$p - p_0 = -\frac{1}{k}\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{kv}\left[f'\left(t + \frac{x}{v}\right) + f'\left(t - \frac{x}{v}\right)\right] \tag{12}$$

slovami: zatiaľ čo výchylka pri pozdĺžnom vlnení kvapaliny alebo plynu sa od pevnej steny odráža so zmeneným znamienkom, vlna tlaku, a preto aj vlna dilatácie sa odráža so znamienkom nezmeneným.

Na ukončenie tohto článku si ešte predstavme, že proti pevnej základni širokého valca postupuje vytrvale harmonické vlnenie, pri ktorom $u = u_0 \sin \omega\left(t + \frac{x}{v}\right)$. Toto vlnenie vytvára s vlnením od steny sa odrážajúcim stojaté vlnenie, pri ktorom, podľa vzorca (12), tlak plynu vo valci je:

$$p = p_0 - \frac{\omega u_0}{kv}\left[\cos \omega\left(t + \frac{x}{v}\right) + \cos \omega\left(t - \frac{x}{v}\right)\right] =$$

$$= p_0 - \frac{4\pi\nu u_0}{kv}\cos\frac{2\pi x}{\lambda}\cos\frac{2\pi t}{T}$$

teda pretlak

$$P = p - p_0 = -\frac{4\pi\nu u_0}{kv}\cos\frac{2\pi x}{\lambda}\cos\frac{2\pi t}{T} \tag{13}$$

8.6. Hustota energie a intenzita vlnenia. Keď hmotné prostredie je vo vlnivom pohybe, energia pripadajúca v ňom na objemový element so zvolenou veľkosťou je zmenená. Zväčšenie mechanickej energie objemového elementu plynu alebo kvapaliny pri ich vlnivom pohybe má svoju príčinu v tom, že sa element hmotnosti dm pohybuje rýchlosťou $\mathbf{v}$, aj v tom, že naň pôsobí zmenený tlak $p = p_0 + P$. Prvá — *kinetická* — časť celkovej energie je $\mathrm{d}K = \frac{1}{2} v^2\, \mathrm{d}m$. Druhá časť d$U$, ktorá sa nazýva energia *potenciálna*, rovná sa práci, ktorú objemový element nachádzajúci sa pod tlakom p je schopný