smeru osi X je vyjadrený funkciou tvaru $u_1 = f\left(t + \frac{x}{v}\right)$. Odraz rozruchu na uzavretom konci valca, kde sa výchylky objemových elementov plynu prítomného vo valci trvale rovnajú nule, práve tak ako odraz rozruchu na upevnenom konci struny opisuje algebraický súčet

$$u = u_1 + u_2 = f\left(t + \frac{x}{v}\right) - f\left(t - \frac{x}{v}\right)$$

avšak podľa vzorca (8) pre pretlak vychádza:

$$p - p_0 = -\frac{1}{k}\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{kv}\left[f'\left(t + \frac{x}{v}\right) + f'\left(t - \frac{x}{v}\right)\right] \tag{12}$$

slovami: zatiaľ čo výchylka pri pozdĺžnom vlnení kvapaliny alebo plynu sa od pevnej steny odráža so zmeneným znamienkom, vlna tlaku, a preto aj vlna dilatácie sa odráža so znamienkom nezmeneným.

Na ukončenie tohto článku si ešte predstavme, že proti pevnej základni širokého valca postupuje vytrvale harmonické vlnenie, pri ktorom $u = u_0 \sin \omega\left(t + \frac{x}{v}\right)$. Toto vlnenie vytvára s vlnením od steny sa odrážajúcim stojaté vlnenie, pri ktorom, podľa vzorca (12), tlak plynu vo valci je:

$$p = p_0 - \frac{\omega u_0}{kv}\left[\cos \omega\left(t + \frac{x}{v}\right) + \cos \omega\left(t - \frac{x}{v}\right)\right] =$$

$$= p_0 - \frac{4\pi\nu u_0}{kv}\cos\frac{2\pi x}{\lambda}\cos\frac{2\pi t}{T}$$

teda pretlak

$$P = p - p_0 = -\frac{4\pi\nu u_0}{kv}\cos\frac{2\pi x}{\lambda}\cos\frac{2\pi t}{T} \tag{13}$$

8.6. Hustota energie a intenzita vlnenia. Keď hmotné prostredie je vo vlnivom pohybe, energia pripadajúca v ňom na objemový element so zvolenou veľkosťou je zmenená. Zväčšenie mechanickej energie objemového elementu plynu alebo kvapaliny pri ich vlnivom pohybe má svoju príčinu v tom, že sa element hmotnosti dm pohybuje rýchlosťou $\mathbf{v}$, aj v tom, že naň pôsobí zmenený tlak $p = p_0 + P$. Prvá — *kinetická* — časť celkovej energie je d$K = \frac{1}{2} v^2$ dm. Druhá časť dU, ktorá sa nazýva energia *potenciálna*, rovná sa práci, ktorú objemový element nachádzajúci sa pod tlakom p je schopný vykonať, keď sa zväčšením jeho objemu jeho tlak p zmenší na rovnovážny tlak p_0, teda pretlak $P = p - p_0$ na nulu, za predpokladu, že sa táto expanzia deje proti konštantnému vonkajšiemu tlaku p_0.

Aby sme našli správne vyjadrenie tejto druhej časti energie, budeme najprv počítať prácu pri takejto expanzii plynu alebo kvapaliny so začiatočným objemom V. Táto práca je (pozri čl. 12.9)

$$A = \int_V^{V_0} (p - p_0)\,\mathrm{d}V$$

Podľa vzorca (8.5.1) na str. 312 je $p - p_0 = -\frac{1}{k}\frac{V - V_0}{V_0}$, teda $\mathrm{d}p = -\frac{1}{kV_0}\,\mathrm{d}V$, takže $\mathrm{d}V = -kV_0\,\mathrm{d}p$. Práca A je preto aj

$$A = \int_V^{V_0} (p - p_0)\,\mathrm{d}V = -\,\mathrm{k}V_0 \int_p^{p_0} (p - p_0)\,\mathrm{d}p = -kV_0 \int_P^0 P\,\mathrm{d}P = \frac{1}{2}kV_0P^2$$

Tým sme vypočítali prácu toho množstva kvapaliny alebo plynu, ktorého objem pred vznikom vlnenia bol V_0. Časť tejto práce pripadajúcej na elementárny objem $\mathrm{d}V_0$, ktorý však budeme značiť opäť $\mathrm{d}V$, je teda $\mathrm{d}U = \frac{1}{2}kP^2\,\mathrm{d}V$. Zväčšenie mechanickej energie v objeme $\mathrm{d}V$, spôsobené vlnením plynného alebo kvapalného prostredia, je teda

$$\mathrm{d}E = \mathrm{d}K + \mathrm{d}U = \frac{1}{2}sv^2\,\mathrm{d}V + \frac{1}{2}kP^2\,\mathrm{d}V = \frac{1}{2}(sv^2 + kP^2)\,\mathrm{d}V$$

alebo

$$e = \frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}V} = \frac{1}{2}sv^2 + \frac{1}{2}kP^2 = e_k + e_p \tag{1}$$

Podiel $e = \frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}V}$, ktorý sa číselne rovná energii vlnivého pohybu prítomnej v objemovej jednotke, volá sa *hustota energie pri vlnivom pohybe*.

Majme na mysli jednorozmerné netlmené vlnenie postupujúce v plynnom alebo kvapalnom prostredí v smere osi X rýchlosťou c. Písmeno c sme v tomto prípade použili na označenie rýchlosti postupu vlnenia, aby sme ju rozlíšili od rýchlosti pohybu elementov prostredia v. Pri takomto vlnení $u = f\left(t - \frac{x}{c}\right)$, $v = \frac{\partial u}{\partial t} = f'$, takže

$$e_k = \frac{1}{2}sv^2 = \frac{1}{2}sf'^2$$

Pretlak P určuje v tomto jednoduchom prípade vzorec (8.5.1), podľa ktorého

$$P = -\frac{1}{k}\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{k} f'\left(-\frac{1}{c}\right) = \frac{1}{kc} f'$$

alebo, keďže je $c^2 = \frac{1}{sk}$, $P^2 = \frac{s}{k} f'^2$

a

$$e_p = \frac{1}{2} kP^2 = \frac{1}{2} sf'^2 = e_k$$

Preto

$$e = e_k + e_p = 2e_k = 2e_p = sv^2 = kP^2 \tag{1}$$

Intenzita postupného vlnenia, ktorá sa nazýva aj hustota prúdenia energie pri postupnom vlnení, je definovaná ako veličina číselne sa rovnajúca energii prechádzajúcej za jednotku času cez plošnú jednotku kolmú na smer postupu vlnenia,

$$i = ce$$

Pre strednú hodnotu intenzity vlnenia vychádza

$$i_s = ce_s = ckP_s^2 \tag{2}$$

alebo, keďže je $c = \frac{1}{\sqrt{sk}}$, takže $k = \frac{1}{sc^2}$,

$$i_s = \frac{P_s^2}{sc} \tag{3}$$

Odvodíme ešte vzorec vyjadrujúci intenzitu pozdĺžneho harmonického vlnenia vyjadreného funkciou

$$u = u_0 \sin 2\pi\nu \left(t - \frac{x}{c}\right) \tag{4}$$

Jej derivovaním podľa času dostaneme pre rýchlosť v mechanického pohybu objemových elementov prostredia vyjadrenie

$$v = 2\pi\nu u_0 \cos 2\pi\nu \left(t - \frac{x}{c}\right) = v_0 \cos 2\pi\nu \left(t - \frac{x}{c}\right) \tag{5}$$

kde $v_0 = 2\pi\nu u_0$ je amplitúda tejto rýchlosti. Podľa vzorca (8.5.1) na str. 312 pretlak v tomto prípade je:

$$P = -\frac{1}{k}\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{2\pi\nu u_0}{kc}\cdot\cos 2\pi\nu\left(t - \frac{x}{c}\right) = P_0 \cos 2\pi\nu\left(t - \frac{x}{c}\right) \tag{6}$$

kde

$$P_0 = \frac{2\pi\nu u_0}{kc} = \frac{v_0}{kc} \tag{7}$$

je amplitúda pretlaku. Keďže $c = \sqrt{\frac{1}{ks}}$ a $kc = \frac{1}{sc}$, druhá mocnina pretlaku je:

$$P^2 = 4\pi^2 s^2 c^2 \nu^2 u^2{}_0 \cos^2 2\pi\nu\left(t - \frac{x}{c}\right)$$

a jej stredná hodnota

$$P_s^2 = 2\pi^2 s^2 c^2 \nu^2 u_0^2$$

lebo

$$\frac{1}{T}\int_0^T \cos^2 2\pi\nu\left(t - \frac{x}{c}\right) = \frac{1}{2} \tag{8}$$

Takto pre strednú hodnotu intenzity pozdĺžneho harmonického vlnenia podľa vzorca (3) dostaneme vyjadrenia

$$i_s = \frac{P_s^2}{sc} = 2\pi^2 sc\nu^2 u_0^2 = \frac{1}{2} scv_0^2 \tag{9}$$

Až doteraz sme koeficient stlačiteľnosti k hmotného prostredia pri jeho vlnivom pohybe považovali za konštantný a za tohto predpokladu sme získali vzorec (6), podľa ktorého sa priemerná hodnota pretlaku pri jednorozmernom harmonickom vlnení plynu alebo kvapaliny rovná nule. Tento predpoklad je nepochybne správny pri vlnení s dostatočne malou intenzitou, keď sú zmeny tlaku malé, nie však vtedy, keď je intenzita vlnenia veľká, ako je to napr. pri tzv. ultrazvuku. Keďže na priemernú hodnotu pretlaku, ktorá sa nazýva aj *tlak akustického žiarenia*, reagujú rádiometre, prístroje na meranie väčších zvukových a najmä ultrazvukových intenzít, odvodíme jeho vyjadrenie pre prípad plynného prostredia a harmonickú rovinnú vlnu.

Meniaci sa tlak plynu pri jeho vlnivom pohybe závisí od jeho objemu podľa Poissonovej rovnice (7.13.3), $pV^\varkappa = p_0 V_0^\varkappa$, takže

$$p = \frac{p_0 V_0^\varkappa}{V^\varkappa} = \frac{p_0}{(V/V_0)^\varkappa} \quad \frac{p_0}{\left(1 + \dfrac{V - V_0}{V_0}\right)^\varkappa} = \frac{p_0}{(1 + \varphi)^\varkappa} \tag{a}$$

V tomto vzorci $\varphi = \dfrac{V - V_0}{V_0}$ je relatívne zväčšenie objemu, nazývané aj jeho dilatáciou, ktoré je aj v intenzívnom vlnení malé. Keď tlak p, daný vzorcom (a), vyjadríme pomocou Taylorovho radu a ponecháme z neho prvé tri členy, dostaneme

$$p = p_0 - p_0 \varkappa \varphi + \frac{1}{2} p_0 (1 + \varkappa) \varkappa \varphi^2 \tag{b}$$

Ak je $u = u_0 \sin \omega \left(t - \dfrac{x}{c}\right)$, podľa odvodenia vzorca (8.5.1) je:

$$\varphi = \frac{V - V_0}{V_0} = \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{u_0 \omega}{c} \cos \omega \left(t - \frac{x}{c}\right) = -\frac{v_0}{c} \cos \omega \left(t - \frac{x}{c}\right)$$

teda

$$P = p - p_0 = \frac{p_0 \varkappa v_0}{c} \cos \omega \left(t - \frac{x}{c}\right) + \frac{1}{2} p_0 (1 + \varkappa) \varkappa \frac{v_0^2}{c^2} \cos^2 \omega \left(t - \frac{x}{c}\right)$$

Pri počítaní priemernej hodnoty pretlaku P^* stačí mať na zreteli len druhý člen, lebo priemerná hodnota prvého sa zrejme rovná nule. S použitím vzorcov (8) a $c^2 = \varkappa p_0 / s_0$ vychádza:

$$P^* = \frac{1}{4} p_0 (1 + \varkappa) \frac{c^2 s_0 v_0^2}{p_0 c^2} = \frac{1 + \varkappa}{2} \cdot \frac{1}{2} s_0 v_0^2$$

Podľa vzorca (9) stredná hodnota hustoty energie v kvapalnom alebo plynnom prostredí, v ktorom je harmonické postupné vlnenie, je $e_s = \dfrac{i_s}{c} = \dfrac{1}{2} s_0 v_0^2$ vtedy, keď sme rovnovážnu mernú hmotnosť prostredia aj vo vzorci (9) označili s_0. Pre tlak akustického žiarenia takto dostaneme vyjadrenie

$$P^* = \frac{1 + \varkappa}{2} e_s \tag{10}$$

ktoré ako prvý odvodil Rayleigh.[1])

[1]) John William Struut Rayleigh (1842—1919), anglický fyzik. Pracoval najmä v oblasti akustiky, elektrodynamiky a optiky. Zaoberal sa zákonmi žiarenia absolútne čierneho telesa a rozptylom svetla v atmosfére. Za objav vzácnych plynov v zemskej atmosfére bola mu v r. 1904 udelená Nobelova cena.