8.7. Guľové vlny v kvapalinách a plynoch. Predstavme si, že v určitom okamihu v niektorom bode pružného hmotného prostredia sa začal vytvárať rozruch. Súhrn všetkých bodov, do ktorých sa rozruch dostal za rovnaký čas t, nazýva sa *čelo vlny* v tomto čase. Súhrn bodov, v ktorých je vo zvolenom okamihu rovnaký alebo analogický stav, nazýva sa *vlnoplocha*. Priamo z definície homogénneho a izotropného hmotného prostredia (t. j. prostredia, ktorého vlastnosti sú nezávislé od smeru, v ktorom sa určujú) vyplýva, že v takomto prostredí, teda v každej kvapaline alebo plyne, sa rozruchy šíria vo všetkých smeroch rovnakou rýchlosťou. Vo vlnení, ktoré sa šíri v kvapaline alebo plyne z jedného bodu, čelo vlny aj vlnoplochy majú preto tvar sústredných guľových plôch a vlnenie sa nazýva *vlnenie guľové*. Pri takomto vlnení je napríklad pretlak $P = p - p_0$ závislý len od času t a vzdialenosti r od bodu (stredu guľového vlnenia), kde rozruch vznikol, čiže $P = P(t, r)$.

Zo zákona o zachovaní energie vyplýva, že ak v čase t_1 v bodoch povrchu gule s polomerom r_1, so stredom v mieste začiatočného bodového rozruchu, intenzita vlnenia bola $i_1 = kvP_1^2$, v čase $t_2 = t_1 + (r_2 - r_1) : v$ v bodoch povrchu gule s polomerom r_2 intenzita vlnenia bude i_2, pričom je splnená rovnica $i_1 \,.\, 4\pi r_1^2 = i_2 \,.\, 4\pi r_2^2$, t. j. vzhľadom na vzorec (2) predchádzajúceho článku,

$$P = \frac{P_0}{r} \tag{1}$$

kde sa konštanta P_0 číselne rovná pretlaku v jednotkovej vzdialenosti od bodového stredu rozruchu v príslušnom čase.

Podľa tohto výsledku pri guľovom vlnení postupujúcom v plynnom alebo kvapalnom prostredí rýchlosťou v od stredu rozruchu pretlak P ako funkcia času a miesta je daný výrazom

$$P = \frac{C}{r}\, f\left(t - \frac{r}{v}\right) \tag{2}$$

Vyhovuje parciálnej diferenciálnej rovnici

$$\frac{\partial^2 P}{\partial t^2} = v^2 \left(\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial z^2}\right) = v^2 \,\Delta P \tag{3}$$

o čom sa môžeme presvedčiť utvorením druhej parciálnej derivácie pretlaku podľa času, ako aj divergencie jeho gradientu a dosadením.

Rovnica (3) je veľmi významná, lebo jej vyhovuje nielen guľové vlnenie, ale približne — ako sa hneď presvedčíme — aj akékoľvek iné vlnenie, prebiehajúce v plynnom alebo kvapalnom prostredí bez vnútorného trenia.

Pre akýkoľvek pohyb stlačiteľnej kvapaliny alebo plynu bez vnútorného trenia, ak ich merná hmotnosť s závisí len od tlaku, platí *Eulerova rovnica* v tvare (7.3.7), str. 248,

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \, . \operatorname{grad} \mathbf{v} = -\operatorname{grad} V - \operatorname{grad} \Phi \tag{4}$$

kde $\mathbf{v}$ je rýchlosť pohybu hmotného prostredia vo zvolenom — v priestore nehybnom — bode, V potenciál vonkajšieho silového poľa v tomto bode a $\Phi = \int \frac{\mathrm{d}p}{s}$.

Rovnicu (4) pre jej aplikáciu na vlnivý pohyb tekutín môžeme upraviť na jednoduchší tvar. Dvojčlen $\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} . \operatorname{grad} \mathbf{v}$, ktorý má význam zrýchlenia bodu sledujúceho pohyb tekutiny, môžeme pri vlnivom pohybe prakticky vždy stotožniť s časovou zmenou rýchlosti v pevne zvolenom bode, t. j. v ľavej strane rovnice (4) druhý člen zanedbať. Umožňuje to okolnosť, že vlnová dĺžka vlnenia je vždy podstatne väčšia ako amplitúda výchyliek bodov hmotného prostredia vo vlnivom pohybe. Keď si okrem toho predstavíme, že sa plyn alebo kvapalina, v ktorej sa šíri vlnenie, nenachádza v nijakom vonkajšom silovom poli, takže je $V = 0$, a preto aj grad $V = 0$, rovnicu (4) dostávame v zjednodušenom tvare

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\operatorname{grad} \Phi \tag{5}$$

Podľa vzorca (8.5.1) na str. 312 tlak v tekutine je :

$$p = p_0 - \frac{1}{kV_0}(V - V_0) = p_0 - \frac{\varphi}{k}$$

pričom p_0 je tlak pred vznikom vlnenia, φ relatívne zväčšenie objemu, čiže dilatácia a k koeficient stlačiteľnosti. Pretože objem tekutiny je nepriamo úmerný jej mernej hmotnosti, môžeme písať:

$$\varphi = \frac{V - V_0}{V_0} = \frac{V}{V_0} - 1 = \frac{s_0}{s} - 1$$

takže

$$\frac{1}{s} = \frac{1}{s_0}(1 + \varphi) \tag{6}$$

S použitím týchto výsledkov dostávame:

$$\Phi(p) = \int_{p_0}^{p} \frac{\mathrm{d}p}{s} = \int_0^{\varphi} -\frac{1}{s_0}(1+\varphi)\frac{\mathrm{d}\varphi}{k} \doteq -\int_0^{\varphi} \frac{1}{s_0 k}\,\mathrm{d}\varphi = -\frac{\varphi}{s_0 k}$$

a rovnica (5) sa upravuje na tvar

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \frac{1}{s_0 k}\,\mathrm{grad}\,\varphi \tag{7}$$

kde s_0 je merná hmotnosť tekutiny pred vznikom vlnenia. Z rovnice (7) vyplýva:

$$\mathbf{v} = \frac{1}{s_0 k}\int_0^t (\mathrm{grad}\,\varphi)\,\mathrm{d}t = \mathrm{grad}\int_0^t \frac{\varphi}{s_0 k}\,\mathrm{d}t = \mathrm{grad}\,\psi \tag{8}$$

Podľa tohto výsledku rýchlosť elementov tekutiny pri jej vlnivom pohybe je gradientom svojho potenciálu

$$\psi = \int_0^t \frac{\varphi}{s_0 k}\,\mathrm{d}t \tag{9}$$

ktorý spĺňa rovnicu

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{\varphi}{s_0 k} \tag{10}$$

Rovnica spojitosti stlačiteľnej tekutiny (7.3.1, str. 247) je:

$$\frac{\partial s}{\partial t} + \mathrm{div}(s\mathbf{v}) = 0$$

Pre prvý člen tejto rovnice, podľa vzorca (6), môžeme písať:

$$\frac{\partial s}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{s_0}{1+\varphi}\right) \doteq s_0\frac{\partial(1-\varphi)}{\partial t} = -s_0\frac{\partial \varphi}{\partial t} \tag{a}$$

lebo relatívna zmena objemu pri vlnení je vždy malá. Pre druhý člen dostávame [pozri aj vzorec (6)]

$$\mathrm{div}\,(s\mathbf{v}) = \nabla\,.\,\frac{s_0}{1+\varphi}\,\mathbf{v} \doteq \nabla\,.\,s_0(1-\varphi)\,\mathbf{v} = s_0(1-\varphi)\,\mathrm{div}\,\mathbf{v} +$$

$$+\,\mathbf{v}\,.\,\mathrm{grad}\,s_0(1-\varphi) \doteq s_0\,\mathrm{div}\,\mathrm{grad}\,\psi - s_0\mathbf{v}\,.\,\mathrm{grad}\,\varphi$$

Pri pozdĺžnom harmonickom vlnení, postupujúcom napr. v plynnom prostredí, ktoré je vyjadrené funkciou (8.6.4, str. 318), pre podiel prvého a druhého člena v získanom výsledku vychádza:

$$\frac{s_0 \operatorname{div} \operatorname{grad} \psi}{s_0 \mathbf{v} \cdot \operatorname{grad} \varphi} = \frac{v}{u_0 \nu} \gg 1$$

lebo napr. pre $v = 331$ m/s, $u_0 = 0{,}1$ cm a $\nu = 1\,000$ Hz $\dfrac{v}{u_0\,\nu} = 331$. Pretože tak to býva aj v iných prípadoch, druhý člen v predchádzajúcom výsledku môžeme zanedbať a napísať:

$$\operatorname{div}(s\mathbf{v}) = s_0 \operatorname{div} \operatorname{grad} \psi = s_0\, \Delta\psi \tag{b}$$

Dosadením výsledkov (a) a (b) do rovnice spojitosti dostávame rovnicu

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} = \Delta\psi \tag{11}$$

ktorá dopĺňa rovnicu (10).

Z rovníc (10) a (11) môžeme vylúčiť ktorúkoľvek z obidvoch funkcií φ a ψ. Derivovaním rovnice (10) podľa času a s prihliadnutím k rovnici (11) dostávame:

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = \frac{1}{sk}\,\Delta\psi \tag{12}$$

pričom sme nulu ako index v označení pokojovej mernej hmotnosti už vynechali.

Podobným spôsobom derivovaním rovnice (11) podľa času vychádza:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = \frac{1}{sk}\,\Delta\varphi \tag{13}$$

Konečne ak v tejto rovnici dilatáciu φ s použitím rovnice (8.5.1) nahradíme pretlakom $P = p - p_0$, dostávame rovnicu

$$\frac{\partial^2 P}{\partial t^2} = \frac{1}{sk}\,\Delta P \tag{14}$$

ktorá vyjadruje šírenie sa rozruchu v plynnom alebo kvapalnom prostredí pomocou veličiny, ktorá najlepšie tento dej charakterizuje, pomocou súčasne prebiehajúceho kolísania tlaku.

V tejto súvislosti pre úplnosť odvodíme aj diferenciálnu rovnicu vlnenia v neohraničenom pružnom, avšak pevnom a izotropnom hmotnom prostredí. Základná pohybová rovnica takéhoto prostredia je rovnica (5.2.3)

$$s\boldsymbol{a} = \boldsymbol{h} + \operatorname{div} \boldsymbol{N} \tag{15}$$

v ktorej $\boldsymbol{a}$ je zrýchlenie bodu sledujúceho pohyb prostredia, s merná hmotnosť, $\boldsymbol{h}$ hustota objemových síl a $\boldsymbol{N}$ tenzor napätia. Práve tak, ako sme to urobili pri odvodzovaní diferenciálnych rovníc vlnenia v kvapalinách a plynoch, aj pri aplikácii rovnice (15) na vlnivý pohyb objemové sily zanedbáme a rovnicu napíšeme v zjednodušenom tvare

$$s\boldsymbol{a} = \operatorname{div} \boldsymbol{N} \tag{16}$$

Tenzor napätia $\boldsymbol{N}$ súvisí s tenzorom deformácie $\boldsymbol{D}$ podľa vzťahu (5.3.11)

$$\boldsymbol{N} = \frac{mE}{1+m} \boldsymbol{D} + \frac{mE\varepsilon}{(m+1)(m-2)} \boldsymbol{I} \tag{17}$$

takže

$$\operatorname{div} \boldsymbol{N} = \overset{2G}{\frac{mE}{1+m}} \operatorname{div} \boldsymbol{D} + \overset{2G}{\frac{mE}{(m+1)(m-2)}} \operatorname{grad} \varepsilon$$

pričom $\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = \operatorname{div} \boldsymbol{u}$.

Pre divergenciu tenzora deformácie $\boldsymbol{D}$ dostávame:

$$\operatorname{div} \boldsymbol{D} = \nabla \cdot \boldsymbol{D} = \nabla \cdot \frac{1}{2} (\nabla \boldsymbol{u} + \boldsymbol{u} \nabla) = \frac{1}{2} \Delta \boldsymbol{u} + \frac{1}{2} \nabla (\nabla \cdot \boldsymbol{u}) = \frac{1}{2} \Delta \boldsymbol{u} + \frac{1}{2} \operatorname{grad} \operatorname{div} \boldsymbol{u}$$

Rovnica (16) je preto aj

$$s\boldsymbol{a} = \operatorname{div} \boldsymbol{N} = \frac{mE}{2(m+1)} (\Delta \boldsymbol{u} + \operatorname{grad} \operatorname{div} \boldsymbol{u}) + \frac{mE}{(m+1)(m-2)} \operatorname{grad} \operatorname{div} \boldsymbol{u}$$

alebo, ak súčasne píšeme: $\boldsymbol{a} = \dfrac{\partial^2 \boldsymbol{u}}{\partial t^2}$,

$$s \frac{\partial^2 \boldsymbol{u}}{\partial t^2} = G \Delta \boldsymbol{u} + \frac{mG}{m-2} \operatorname{grad} \operatorname{div} \boldsymbol{u} \tag{18}$$

Rovnica (18) je diferenciálna rovnica vlnenia v homogénnom a izotropnom pevnom a pružnom hmotnom prostredí.

Predstavme si, že v pružnom a pevnom hmotnom prostredí je rovinné vlnenie s vlnoplochami, ktoré sú všade kolmé na os X, zvolenú v tomto prostredí. Výchylka $\boldsymbol{u} = u\boldsymbol{i} + v\boldsymbol{j} + w\boldsymbol{k}$ hmotného elementu z jeho rovnovážnej polohy, o ktorej netvrdíme, žeby bola nutne rovnobežná s osou X, je potom okrem od času závislá len od súradnice x. Rovnicu (18) môžeme preto v tomto prípade napísať takto:

$$s \frac{\partial^2 \boldsymbol{u}}{\partial t^2} = G \frac{\partial^2 \boldsymbol{u}}{\partial x^2} + \frac{mG}{m-2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \boldsymbol{i} \tag{19}$$

Táto rovnica je však rovnocenná s troma skalárnymi rovnicami

$$s\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = G\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{mG}{m-2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{2(m-1)}{m-2}G\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

alebo

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{2(m-1)}{m-2}\frac{G}{s}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{20a}$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \frac{G}{s}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{G}{s}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \tag{20b}$$

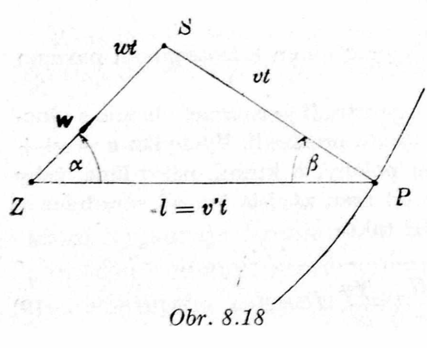
z ktorých vyplýva, že v pevnom, pružnom a izotropnom hmotnom prostredí môžu postupovať pozdĺžne rovinné vlny rýchlosťou $v_1 = \sqrt{\frac{G}{s} \cdot \frac{2(m-1)}{m-2}}$ a priečne rovinné vlny rýchlosťou inou, $v_2 = \sqrt{\frac{G}{s}}$. Keďže priemerná hodnota Poissonovej konštanty je $m = 3$, je približne $v_1 = 2v_2$.

Tento poznatok má veľký praktický význam pre štúdium zemetrasení. Ak ohnisko zemetrasenia je ďaleko, seizmograf (prístroj na registrovanie malých pohybov zemského povrchu) zaznačí najprv príchod pozdĺžnej vlny a až potom príchod priečnej vlny. Pre príslušný časový interval platí:

$$\Delta t = \frac{d}{v_2} - \frac{d}{v_1} = d\left(\frac{1}{v_2} - \frac{1}{2v_2}\right) = \frac{d}{2v_2}$$

z čoho pre vzdialenosť ohniska zemetrasenia vychádza: $d = 2v_2\Delta t$.

8.8. Vplyv vetra na rýchlosť a intenzitu zvuku. Predstavme si, že v dostatočnej výške nad zemským povrchom bodový zdroj rozruchu Z a pozorovateľ P sú vo vzájomnej vzdialenosti l a vzhľadom na zemský povrch v pokoji *(obr. 8.18)*. Okrem toho si predstavme, že vzduch sa v blízkosti zdroja a pozorovateľa pohybuje všade rovnakou rýchlosťou w, ktorá so spojnicou ZP zviera uhol α. Keď zdroj Z na začiatku počítania času vyšle krátky zvukový signál, príslušná tlaková vlna prejde miestom pozorovateľa P v určitom čase t, takže rýchlosť šírenia sa rozruchu v smere ZP je $v' = l/t$. Zvuk sa však v tomto prípade šíri vo všetkých smeroch rovnakou rýchlosťou v, danou vzorcom (8.5.5), nie vzhľadom na



Obr. 8.18